1.2 Aufgabe 2

Aufgabe 2:

Seien $U := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$ und $V := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0 \wedge \operatorname{Im} z \leq 0\}$.

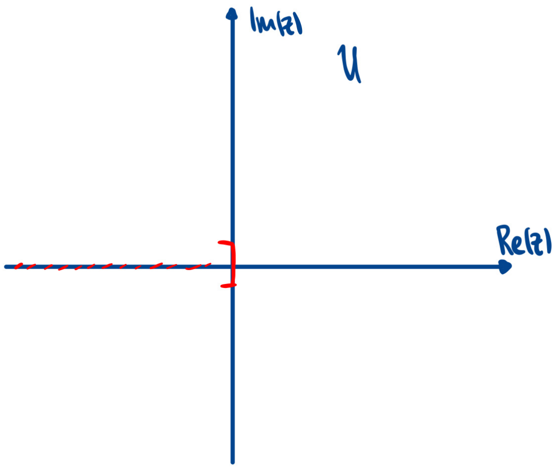
(a) Konstruieren Sie eine biholomorphe Abbildung $h \colon U \to V$.

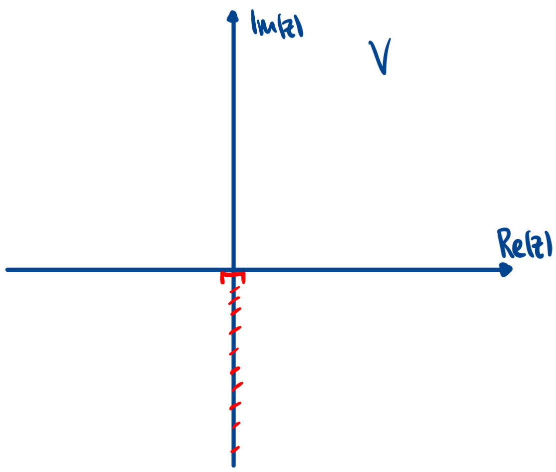
(b) Konstruieren Sie eine Stammfunktion $f \colon V \to \mathbb{C}$ der Funktion $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ mit $f(i) = i$. Entscheiden Sie, ob f eindeutig bestimmt ist.

(c) Sei $\gamma \colon [0,1] \ni t \mapsto t + i\cos(\frac{\pi}{2}t)$. Berechnen Sie das komplexe Wegintegral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ sowie seinen Real- und Imaginärteil.

(2+2+2 Punkte)

Wir skizzieren zunächst die Mengen U und V.





Zu (a)

Wir behaupten, dass folgende Funktion die gewünschten Eigenschaften hat:

$$h : U \to V \ ; \ z \mapsto iz = e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot z$$

Wir müssen zunächst zeigen, dass $h(U) \subseteq V$ gilt. Drückt man die beiden Mengen in Polarkoordinaten aus, dann haben sie die Form

$$U = \left\{re^{i\varphi} : r \in \mathbb{R}^+ \ , \ \varphi \in]-\pi, \pi[\right\} \quad \text{und} \quad V = \left\{re^{i\varphi} : r \in \mathbb{R}^+ \ , \ \varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\right\}$$

Sei somit ein $w = re^{i\varphi} \in U$ mit $\varphi \in]-\pi, \pi[$ beliebig, dann gilt für das Bild

$$h(w) = e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot re^{i\varphi} = r \cdot e^{i(\frac{\pi}{2}+\varphi)} \in V \quad \text{wegen} \ -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \varphi < \frac{3\pi}{2}$$

Somit ist die Abbildung wohldefiniert. Sie ist auch offensichtlich injektiv, da für beliebige $w, z \in U$ gilt

$$h(w) = h(z) \implies i \cdot w = i \cdot z \implies w = z$$

Zum Nachweis der Surjektivität geben wir uns ein $w = re^{i\varphi} \in V$ mit $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ beliebig vor. Dann gilt

$$re^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})} \in U \quad \text{und} \quad h(re^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})}) = w$$

Zu (b)

V ist offensichtlich offen. Zudem ist V sternförmig mit Sternpunkt i, so dass V ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist und folglich hat die holomorphe Funktion

$$f : V \to \mathbb{C} \; ; \; z \to \frac{1}{z}$$

eine Stammfunktion. Wir definieren uns für jedes $z \in V$ den Weg

$$\Gamma_z : [0,1] \to V \; ; \; z \mapsto i + (z-i)t$$

Somit erhält man durch

$$F : V \to \mathbb{C} \; ; \; z \mapsto i + \int_{\Gamma_z} \frac{dw}{w}$$

die gesuchte Stammfunktion. Diese ist auch eindeutig bestimmt. Nehmen wir an, dass wir eine weitere Funktion g mit diesen Eigenschaften haben, dann lässt sich g lokal in eine Potenzreihe um i entwickeln.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(i)}{n!}(z-i)^n$$

Vergleicht man die Ableitung mit f', dann sieht man

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{g^{(n)}(i)}{n!}(z-i)^{n-1} = g'(z) = \frac{1}{z} = f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{f^{(n)}(i)}{n!}(z-i)^{n-1} \implies g^{(n)}(i) = f^{(n)}(i) \text{ für } n \geqslant 1$$

Offensichtlich gilt auch $f(i) = i = g(i)$, so dass die beiden Funktionen nach dem Identitätssatz gleich sind.

Zu (c)

Da F eine Stammfunkion ist und mit dem holomorphen Logarithmus übereinstimmt, gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = F\big(\gamma(1)\big) - F\big(\gamma(0)\big) = F(1) - F(i) = Log(1) - Log(i) = Log(e^0) - Log(e^{\frac{i\pi}{2}}) = -\frac{i\pi}{2}$$