H21T3A5

a) Geben Sie eine auf $D \coloneqq \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ holomorphe Funktion an, die der folgenden Eigenschaft genügt: $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$ für alle n ∈ ℕ. Begründen sie, dass es nur eine einzige Funktion gibt, die dieser Eigenschaft genügt.

b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise verschiedener komplexer Zahlen mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Zeigen Sie: Falls $f: \mathbb{C}\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(a_n) = 0$ für alle n ∈ ℕ ist, dann ist entweder f konstant 0 oder f hat bei a eine wesentliche Singularität.

c) Geben Sie nun zwei auf ℂ\{−1, 0} definierte holomorphe Funktionen an, die die in (a) genannte Eigenschaft erfüllen.

Zu a)

$f: D \to \mathbb{C}\,; z \to \frac{1-z}{1+z}$ erfüllt die geforderte Eigenschaft. Sei nun $g: D \to \mathbb{C}$ eine weitere holomorphe Funktion, die diese Eigenschaft erfüllt. Zu zeigen ist f = g.

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von paarweise verschiedenen Folgegliedern mit $0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$. Deshalb hat die Menge $N \coloneqq \left\{\frac{1}{n} := n \in \mathbb{N}\right\}$ den Häufungspunkt 0.

Es gilt: D ist ein Gebiet, 0 ∈ D, f und g sind holomorph auf D und $f(z) = g(z)$ füür alle z ∈ N mit Häufungspunkt in D. Somit folgt f = g nach dem Identitätssatz.

Zu b)

Sei $A \coloneqq \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Diese hat den Häufungspunkt a (Beweis analog zu oben).

Fall 1: a ist hebbare Singularität.

Dann hat f eine holomorphe Fortsetzung F : ℂ → ℂ und wegen $F(a_n) = f(a_n) = 0$ für alle z ∈ A mit Häufungspunkt in ℂ, also gilt F(z) = 0 für alle z ∈ ℂ nach dem Identitätssatz, somit insbesondere f(z) = 0 für alle z ∈ ℂ\{a}.

Fall 2: a ist Polstelle der Ordnung k ∈ ℕ.

Dann hat $g: \mathbb{C}\backslash\{a\} \to \mathbb{C}\,; z \to (z-a)^k f(z)$ eine holomorphe Fortsetzung G : ℂ → ℂ. Analog zu Fall 1 zeigt man g(z) = 0 für alle z ∈ ℂ\{a}. Aus $(z-a)^k \neq 0$ folgt f(z) = 0 für alle z ∈ ℂ\{a}.

Fall 3: a ist wesentliche Singularität → Die Aussage ist wahr.

Zu c)

Die Funktion $h: \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\,; z \to e^{\frac{2\pi i}{z}}$ ist holomorph, hat bei 0 eine wesentliche Singularität und es gilt $h\left(\frac{1}{n}\right) = e^{2\pi i n} = 1$ für alle n ∈ ℕ.

Damit sind $f_1\colon \mathbb{C}\backslash\{0;1\} \to \mathbb{C}\,; z \to \frac{1-z}{1+z}$ und $f_2\colon \mathbb{C}\backslash\{0;1\} \to \mathbb{C}\,; z \to \frac{1-z}{1+z} e^{\frac{2\pi i}{z}}$ zwei verschiedene Funktionen, die beide auf $\mathbb{C}\backslash\{0;1\}$ holomorph sind mit $f_1\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = f_2\left(\frac{1}{n}\right)$.