H21T3A4

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; x \to \frac{x\sin(x)}{x^2+1}$.

a) Zeigen Sie, dass der Limes $\lim\limits_{R\to\infty} \int_0^R f(x)dx$ existiert. Begründen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist.
b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ mit Hilfe des Residuensatzes. Geben Sie insbesondere Integrationspfade explizit an und weisen Sie nach, dass die Werte der Kurvenintegrale gegen das entsprechende Integral konvergieren.

Zu a)

$|f(x)| = \frac{|x||\sin(x)|}{1+x^2} \le \frac{|x|}{1+x^2} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$ und für alle k $\in \mathbb{Z}$ ist f als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall [kπ; (k+1)π] integrierbar, daher ist $\left(\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x\sin(x)}{x^2+1}dx\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine alternierende Folge, die wegen $\frac{x+l\pi}{(x+l\pi)^2+1}|\sin(x+l\pi)| \le \frac{x}{x^2+1}|\sin(x)|\, f\ddot{u}r\ x \ge 0$ monoton gegen 0 konvergiert. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert die alternierende Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x\sin(x)}{x^2+1}dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\lim\limits_{R\to\infty} \int_0^R \frac{x\sin(x)}{x^2+1}dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x\sin(x)}{x^2+1}dx.$

Wegen $f(-x) = \frac{-x\sin(-x)}{(-x)^2+1} = f(x)$ existiert $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x\sin(x)}{x^2+1}dx = 2\lim\limits_{R\to\infty}\int_0^R \frac{x\sin(x)}{x^2+1}dx.$

Zu b)

Es seien $\gamma_1\colon [-R;R] \to \mathbb{C}\,; t \to t$, $\gamma_2\colon \left[0;\sqrt{R}\right] \to \mathbb{C}\,; t \to R+it$, $-\gamma_3\colon [-R;R] \to \mathbb{C}\,; t \to t+iR$, $-\gamma_4\colon \left[0;\sqrt{R}\right] \to \mathbb{C}\,; t \to -R+it$ und $\gamma := \gamma_1 \dotplus \gamma_2 \dotplus \gamma_3 \dotplus \gamma_4$ der geschlossene Weg, der durch Anstückeln dieser vier Wege entsteht.

$$\int_{-R}^{R} \frac{x\sin(x)}{1+x^2}dx = \int_{-R}^{R} \frac{x\,Im(e^{ix})}{1+x^2}dx = Im\left(\int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx\right)$$

$g\colon \mathbb{C}\backslash\{\pm i\} \to \mathbb{C}\,; z \to \frac{ze^{iz}}{1+z^2}$ ist holomorph mit $\lim\limits_{z\to i}|g(z)| = \infty$ und $\lim\limits_{z\to i}(z-i)g(z) = \lim\limits_{z\to i}\frac{ze^{iz}}{z+i} = \frac{1}{2e}$ deshalb hat g bei i einen Pol erster Ordnung mit Residuum $Res(g,i) = \frac{1}{2e}$. Für R > 1 ist $Spur(\gamma) \cap \{\pm i\} = \emptyset$, deshalb gilt $\int_\gamma g(z)dz = 2\pi i\big(n(\gamma,i)Res(g,i) + n(\gamma,-i)Res(g,-i)\big) = 2\pi i\left(1 * \frac{1}{2e} + 0 * Res(g,-i)\right) = \frac{\pi i}{e}.$

$$\left|\int_{\gamma_2} g(z)dz\right| = \left|\int_0^{\sqrt{R}} \frac{(R+it)e^{i(R+it)}}{1+(R+it)^2}\, i\, dt\right| \le \int_0^{\sqrt{R}} \frac{|R+it||e^{i(R+it)}|}{|1+(R+it)^2|}|i|\,dt = \int_0^{\sqrt{R}} \frac{\sqrt{R^2+t^2}\,e^{-t}}{\sqrt{(1+R^2-t^2)^2+(2Rt)^2}}\,dt \le$$
$$(*) \le \int_0^{\sqrt{R}} \frac{\sqrt{R^2+R}\,e^{-t}}{1+R^2-R}dt = \frac{\sqrt{R^2+R}}{1+R^2-R}\int_0^{\sqrt{R}} e^{-t}dt \le \frac{\sqrt{R^2+R}}{1+R^2-R}\sqrt{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

(*): für alle $t \in \left[0;\sqrt{R}\right]$ gilt: $t^2 \le R\,;\ 1+R^2-t^2 \ge 1+R^2-R\,; 2Rt \ge 0$, insbesondere $\sqrt{(1+R^2-t^2)^2+(2Rt)^2} \ge \sqrt{(1+R^2-R)^2} = 1+R^2-R$

Analog zeigt man $\left|\int_{-\gamma_4} g(z)dz\right| = \left|\int_0^{\sqrt{R}} \frac{(-R+it)e^{i(-R+it)}}{1+(-R+it)^2} i\, dt\right| \leq \cdots \leq \frac{\sqrt{R^2+R}}{1+R^2-R}\sqrt{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$.

$\left|\int_{-\gamma_3} g(z)dz\right| = \left|\int_{-R}^{R} \frac{(t+iR)e^{i(t+iR)}}{1+(t+iR)^2} dt\right| \leq \int_{-R}^{R} \frac{|t+iR|e^{-R}}{\sqrt{(1+t^2-R^2)^2+(2tR)^2}} dt \leq \int_{-R}^{R} \frac{2R\, e^{-R}}{\sqrt{(1+t^2-R^2)^2+(2tR)^2}} dt \xrightarrow[R\to\infty]{}$ $(*) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, denn (*): $|1+t^2-R^2| \geq R^2-R-1\ für\ |t| \leq \sqrt{R}$ und $2tR \geq 2R^{\frac{3}{2}}\ für\ |t| \geq \sqrt{R}$.

Somit gilt $\frac{\pi i}{e} = \lim_{R\to\infty} \int_\gamma g(z)dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} g(z)dz + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} g(z)dz + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_3} g(z)dz +$ $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_4} g(z)dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} g(z)dz + 0 + 0 + 0 = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{te^{it}}{1+t^2} dt$ und daher ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$ $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x\sin(x)}{x^2+1} dx = \lim_{R\to\infty} \left(Im\left(\int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{1+x^2} dx\right)\right) = \lim_{R\to\infty} \left(Im\left(\frac{\pi i}{e}\right)\right) = \frac{\pi}{e}$.