H21T3A3

a) Zeigen Sie, dass
$(2t+2)+4x^3x' = 0$ (1)
eine exakte Differentialgleichung ist.

b) Berechnen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems
$(2t+2)+4x^3x' = 0;\ x(0) = 1$ (2)
Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D Ihrer Lösung an.

c) Zeigen Sie, dass für jedes $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2$ und jede Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$ von
$(2t+2)+4x^3x' = 0\ ;\ x(\tau) = \xi$ (3)
sowohl I als auch $\lambda(I)$ beschränkt ist.

Vorbemerkung:

$(2t+2)+4x^3x' = 0$ hat die Form $f(t,x)+g(t,x)x' = 0$

Zu a)

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ; (t,x) \to t^2+2t+x^4$ erfüllt $grad(F)(t,x) = \binom{f(t,x)}{g(t,x)}$, also ist die Differentialgleichung exakt.

Zu b)

Für jede Lösung $\lambda: I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems (2) ist $F\big(t,\lambda(t)\big) = F(0,1)$ für alle $t \in I$ konstant.

Diese Gleichung liefert $t^2+2t+\big(\lambda(t)\big)^4 = 0+0+1$, also $\lambda(t) = \sqrt[4]{1-2t-t^2} = \sqrt[4]{\big(-1+\sqrt{2}\big)\big(-1-\sqrt{2}\big)}$. Der Fall $\lambda(t) = -\sqrt[4]{1-2t-t^2}$ ist ausgeschlossen, da $\lambda(0) = 1$. Somit ist λ reellwertig auf $\big[-1-\sqrt{2}\ ;\ -1+\sqrt{2}\big]$.

$\lambda'(t) = \frac{-2-2t}{4\sqrt[4]{(1-2t-t^2)^3}} = \frac{-2-2t}{4\big(\lambda(t)\big)^3}$ ist definiert nur auf $]-1-\sqrt{2}\ ;\ -1+\sqrt{2}[$.

Es gilt $(2t+2)+4\big(\lambda(t)\big)^3\lambda'(t) = (2t+2)+4\big(\lambda(t)\big)^3\frac{(-2-2t)}{4\big(\lambda(t)\big)^3} = 0$.

Daraus folgt: $\lambda:]-1-\sqrt{2}\ ;\ -1+\sqrt{2}[\to \mathbb{R}\ ; t \to \sqrt[4]{1-2t-t^2}$ löst das Anfangswertproblem (2).

Da $|\lambda(t)| \xrightarrow[t\to -1\pm\sqrt{2}]{} \infty$, lässt sich λ nicht weiter fortsetzen, sodass die Fortsetzung immer noch Lösung wäre. Somit ist λ die maximale Lösung.

Zu c)

Sei $\lambda: I \to \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung von (3). Zu zeigen: I und λ(I) sind beschränkt.

Es gilt $F(t, \lambda(t)) = F(\tau, \xi)$. Daher ist $G \coloneqq \{(t, \lambda(t): t \in I\} \subseteq F^{-1}(\{F(\tau, \xi)\})$.

Mit $p_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,; (t, x) \to t$ und $p_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,; (t, x) \to x$ gilt: $I = p_1(G)$ und $\lambda(I) = p_2(G)$.

$F(t, x) = t^2 + 2t + x^4 = (t+1)^2 + x^4 - 1 \geq -1 \implies F^{-1}(\{c\}) = \emptyset\ für\ alle\ c < -1$

und $F^{-1}(\{-1\}) = \{(-1; 0)\}$ und $F^{-1}(\{c\}) = \{(t, x): (t+1)^2 + x^4 = c + 1\}\ für\ alle\ c > -1$.

D.h. $(t+1; x^2)$ liegt auf der Kreislinie $\partial B_{\sqrt{c+1}}(0)$, somit ist $F^{-1}(\{c\})$ beschränkt für alle c ∈ $\mathbb{R}$; insbesondere ist $F^{-1}(\{F(\tau, \xi)\})$ beschränkt, also auch G beschränkt. Und somit sind I und λ(I) ebenfalls beschränkt.