H21T3A2

a) Gegeben sei die Differentialgleichung $x' = 3\sqrt{xt};\ t, x \in]0, \infty[$.

Überprüfen Sie diese auf lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen mit Anfangswerten im offenen ersten Quadranten]0, ∞[×]0, ∞[.

b) Zeigen Sie, dass die Eindeutigkeit der Lösungen nicht mehr gültig ist, sobald man den ersten Quadranten verlässt. Geben Sie dazu zwei verschiedene, auf ℝ globale Lösungen für das Anfangswertproblem x(0) = 0 an.

Zu a)

$f\colon]0;\infty[^2 \to \mathbb{R}\,;(t,x) \to 3\sqrt{xt}$ ost stetig differenzierbar, da $\partial_t f(t,x) = \frac{3x}{2\sqrt{xt}}$ und $\partial_x f(t,x) = \frac{3t}{2\sqrt{xt}}$ beide stetig sind. $]0;\infty[^2$ ist ein Gebiet.

Somit hat nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz jedes Anfangswertproblem $x' = f(x,t)\,; x(\tau) = \xi\ mit\ (\tau,\xi) \in]0;\infty[^2$ eine eindeutige maximale Lösung.

Zu b)

$3\sqrt{xt}$ gibt eine reellwertige Lösung für $(t,x) \in [0;\infty[^2 \cup\,]-\infty;0[^2$; dieses ist nicht mehr offen und ∂f ist nicht mehr definiert, falls x oder t = 0.

Gesucht sind zwei reellwertige Lösungen von $x' = 3\sqrt{xt}\,;\ x(0) = 0$.

i) $\nu\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; t \to 0$ löst das Anfangswertproblem
ii) Trennung der Variablen liefert $\mu\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; t \to t^3$ als Lösung.
Kontrolle: $\mu(0) = 0; \mu'(t) = 3t^2\,, 3\sqrt{\mu(t)t} = 3\sqrt{t^4} = 3t^2$

Somit ist die Eindeutigkeit nicht mehr gegeben.