H21T3A1

Es sei $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{C}\,; t \to 2e^{it}$. Bestimmen Sie:

a) $\int_\gamma \frac{\cos(z)-1}{z^2} dz$
b) $\int_\gamma \frac{\sin(z)}{(z+i)^4} dz$
c) $\int_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} dz$

Hinweis zu c): Betrachten Sie die Reihenentwicklung des Integranden.

Zu a)

Für $z \neq 0$ ist $\frac{\cos(z)-1}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}\right) - 1\right) = \frac{1}{z^2}\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}\right) - \frac{(-1)^0}{(0)!} z^0\right) = \frac{1}{z^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k-2}$ durch eine konvergente Potenzreihe gegeben, hat also eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$, daher gilt $\int_\gamma \frac{\cos(z)-1}{z^2} dz = 0$ nach dem Cauchy-Integralsatz.

Zu b)

Da sin : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, gilt $\frac{\sin'''(-i)n(\gamma,-i)}{3!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sin(z)}{(z-(-i))^{3+1}} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sin(z)}{(z+i)^4} dz$ nach der Cauchy-Integralformel.

Es gilt $n(\gamma, z) = \begin{cases} 1\, f\ddot{u}r\ |z| < 2 \\ 0\, f\ddot{u}r\ |z| > 2 \end{cases}$, also $n(\gamma, -i) = 1$, und $\sin'''(z) = -\cos(z)$.

Somit ist $\int_\gamma \frac{\sin(z)}{(z+i)^4} dz = \frac{2\pi i}{6}(-\cos(-i)) = \frac{-2\pi i\ \cos(-i)}{6}$.

Zu c)

$f: \mathbb{C}\backslash\{0; 1\} \to \mathbb{C}\,; z \to \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ ist holomorph und hat wegen $\lim_{z\to 1}|f(z)| = \infty$ und $\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = -\lim_{z\to 1} e^{\frac{1}{z}} = -e$ bei 1 einen Pol erster Ordnung mit Residuum Res(f, 1) = -e.

Für |z| < 1 konvergiert die geometrische Reihe $\frac{1}{1-z} = \sum_{l=0}^{\infty} z^l$ und für z ≠ 0 $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z}\right)^k$, deshalb gilt $f(z) = \frac{1}{1-z} e^{\frac{1}{z}} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} z^l\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^m$ für $a_m = \sum_{\binom{k,l=0}{l-k=m}}^{\infty} \frac{1}{k!}$ auf der punktierten Umgebung $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ von 0 und daraus erhält man $Res(f, 0) = a_{-1} = \sum_{\binom{k,l=0}{l-k=-1}}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e - 1$. Nach dem Residuensatz folgt dann $\int_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} dz = 2\pi i\big(Res(f, 0) + Res(f, 1)\big) = -2\pi i$