(H21T2A5)

Für eine reelle Zahl r ist die Aufrundung $\lceil r \rceil$ definiert als $\lceil r \rceil := \min\{a \in \mathbb{Z}: a \geq r\}$.

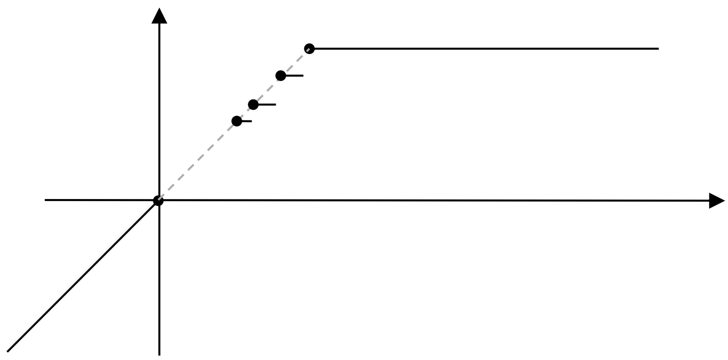
Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; x \to \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\left\lceil \frac{1}{x^2} \right\rceil}} & \text{für } x > 0 \\ x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$

a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen von f.
b) Entscheiden Sie für jedes x > 0, ob f in x stetig ist.
c) Zeigen Sie, dass für alle x > 0 gilt: $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq f(x) \leq x$
d) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen, in denen f differenzierbar ist, und berechnen Sie in diesen Punkten die Ableitung.

Zu a)

Die Funktion $h_1:]0;\infty[\to]0;\infty[\,; x \to \frac{1}{x^2}$ ist streng monoton fallend und $h_1(x) = \frac{1}{x^2} = n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ erfüllt ist.

$\lceil h_1(x) \rceil = \left\lceil \frac{1}{x^2} \right\rceil = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 1 \\ n+1 & \text{für } x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n+1}}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right[\end{cases}$ somit gilt $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{n+1}} & \text{für } x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n+1}}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right[\\ x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$.



Zu b)

Auf den Intervallen $\left[\frac{1}{\sqrt{n+1}}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right[$ und $]1;\infty[$ ist f konstant, deshalb ist f auf $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left]\frac{1}{\sqrt{n+1}}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right[\right) \cup$ $]1;\infty[=]0;\infty[\setminus \left\{\frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\right\}$ stetig, weil lokal konstant.

Wegen $\lim\limits_{x \nearrow \frac{1}{\sqrt{n+1}}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{n+2}} \neq \frac{1}{\sqrt{n+1}} = f\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \lim\limits_{x \searrow \frac{1}{\sqrt{n+1}}} f(x)$ und $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1 = \lim\limits_{x \searrow 1} f(x)$ ist f auf $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\right\}$ nicht stetig.

Zu c)

Die Funktion $h_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; x \to \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ist wegen $h_2'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

streng monoton steigend mit $h_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2+1}} = \cdots = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Daher gilt für $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n+1}}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right[$: $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = h_2(x) \leq h_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} = f(x)$ und für x ≥ 1 gilt: $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1 = f(x)$ wegen $h_2(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1$. Dies zeigt $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq f(x)$ für alle x > 0.

Die Ungleichung $f(x) \leq x$ folgt unmittelbar aus Teilaufgabe (a)

Zu d)

Es gilt:

- Auf $]-\infty; 0[$ gilt: $f|_{]-\infty;0[} = id|_{]-\infty;0[}$, deshalb ist f hier differenzierbar mit $f'(x) = 1$
- Auf $]1; \infty[$ gilt: $f|_{]1;\infty[} = 1$, deshalb ist f hier differenzierbar mit $f'(x) = 0$
- Auf $\left]\frac{1}{\sqrt{n+1}}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right[$ gilt: $f|_{\left]\frac{1}{\sqrt{n+1}};\frac{1}{\sqrt{n}}\right[} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, deshalb ist f hier differenzierbar mit $f'(x) = 0$
- In jedem Punkt $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist f nicht stetig, also nicht differenzierbar.
- Für x = 0 gilt:

  Für h > 0: $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h}$ und mit Teilaufgabe (c): $1 \xleftarrow[h\to 0]{} \frac{1}{\sqrt{h^2+1}} = \frac{\frac{h}{\sqrt{h^2+1}}}{h} \leq \frac{f(h)}{h} \leq \frac{h}{h} = 1$, also $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 1$.
  Für h < 0: $f(h) = h$, also $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$.
  Somit existiert $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 1$

Insgesamt ist f auf $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\right\}$ differenzierbar mit $f'(x) = \begin{cases} 1\,;\ x \leq 0 \\ 0\ \ sonst \end{cases}$.