H21T2A4

Seien $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Im Folgenden bezeichnet DT(x) die Jacobimatrix von T im Punkt x ∈ $\mathbb{R}^n$. Ein kritischer Punkt von g ist ein Punkt, in dem der Gradient verschwindet.

a) Zeigen Sie: Ist g ∘ T eine konstante Funktion und hat g keine kritischen Punkte, so gilt det(DT(x)) = 0 für alle x ∈ $\mathbb{R}^n$.
b) Zeigen Sie: Ist g ∘ T eine konstante Funktion und sind die kritischen Punkte von g isoliert, so gilt det(DT(x)) = 0 für alle x ∈ $\mathbb{R}^n$.
c) Geben Sie ein Beispiel für stetig differenzierbare Abbildungen $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass
   i. g keine kritischen Punkte hat,
   ii. det(DT(x)) = 0 für alle x ∈ $\mathbb{R}^n$,
   iii. g ∘ T keine konstante Funktion ist.

   Weisen Sie dabei nach, dass für dieses Beispiel Eigenschaften i), ii) und iii) erfüllt sind.

Zu a)

Die Ableitung von g ∘ T ist gegeben durch $D(g \circ T): \mathbb{R}^n \to L(R^n, \mathbb{R})\,; x \to (D(g \circ T)(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,; y \to D(g \circ T)(x)[y])$; diese lineare Abbildung ist konstant = 0 (da $g \circ T$ konstant ist) und hat die Jacobimatrix $J(g \circ T)(x)$ als darstellende Matrix und nach Kettenregel gilt $D(g \circ T)(x) = Dg(T(x)) \circ DT(x)$ bzw für die darstellenden Matrizen $J(g \circ T)(x) = Jg(T(x)) * DT(x) =$
$(\partial_1 g(x), \dots, \partial_n g(x)) * \begin{pmatrix} \partial_1 T_1(x) & \cdots & \partial_n T_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 T_n(x) & \cdots & \partial_n T_n(x) \end{pmatrix} =$
$\left(\sum_{j=1}^n \partial_j g(T(x)) \partial_1 T_j(x), \dots, \sum_{j=1}^n \partial_j g(T(x)) \partial_n T_j(x)\right) =$
$\left(\langle grad\ g(T(x)); \partial_1 T(x)\rangle, \dots, \langle grad\ g(T(x)); \partial_n T(x)\rangle\right) = (0, \dots, 0) = 0.$ (1)

Nach Voraussetzung hat g keine kritischen Punkte, also ist $grad\ g(y) \neq 0\ für\ alle\ y \in \mathbb{R}^n$, insbesondere $grad\ g(T(x)) \neq 0\ für\ alle\ x \in \mathbb{R}^n$. Somit ist $\left(grad\ g(T(x))\right)^{\perp} := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle grad\ g(T(x)); y\rangle = 0\} \neq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $\dim\left(\left(grad\ g(T(x))\right)^{\perp}\right) \leq n-1$.

Da nach (1) gilt: $lin\{\partial_1 T(x), \dots, \partial_n T(x)\} \subseteq \left(grad\ g(T(x))\right)^{\perp}$, sind die Spaltenvektoren $\partial_1 T(x), \dots, \partial_n T(x)$ von $DT(x)$ linear abhängig in $\mathbb{R}^n$, also $DT(x)$ nicht invertierbar und daher $\det DT(x) = 0$.

Zu b)

Wie in (a) folgt $\det DT(x) = 0\ für\ alle\ x \in \mathbb{R}^n\ mit\ grad\ g(T(x)) \neq 0$, d.h. überall außer in den isolierten kritischen Punkten von g.

Sei nun T(x) ein kritischer Punkt von g.

Fall 1: Es gibt eine Umgebung U von x, sodass T(y) für jedes y ∈ U ein kritischer Punkt von g ist. Nach Übergang von U zu derjenigen Zusammenhangskomponente von U, die x enthält, dürfen wir o.B.d.A. U als zusammenhängend voraussetzen. T ist auf U konstant, denn

Angenommen y,z ∈ U, T(y) ≠ T(z). Dann sind $T^{-1}(\{T(y)\}) \neq \emptyset$ und $T^{-1}(\{T(z)\}) \neq \emptyset$ zugleich offene und abgeschlossene Teilmengen von U, denn $\{T(y)\}, \{T(z)\}$ sind als einelementige Mengen abgeschlossen und da $I \coloneqq \{\xi \in \mathbb{R}^n : grad\ g(\xi) = 0\}$ nur aus isolierten Punkten besteht ist $I \backslash \{T(y)\}, I \backslash \{T(z)\}$ abgeschlossen, also $\{T(y)\}, \{T(z)\}$ offen (in der Relativtopologie von I). Dies steht im Widerspruch dazu, dass U zusammenhängend ist.

Da T auf der offenen Menge U konstant ist, folgt $DT(y) = 0\ f\ddot{u}r\ alle\ y \in U$.

Fall 2: Es gibt eine Folge $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$ mit $grad\ g\big(T(x_k)\big) \neq 0$, dann ist $\det DT(x_k) = 0$ nach (a) und da $det \circ DT$ stetig ist, gilt dann $0 = \det\big(DT(x_k)\big) = (det \circ DT)(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (det \circ DT)(x)$.

Zu c)

Sei $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to x + y$ und $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$. Dann ist

i) $grad\ g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also hat g keine kritischen Punkte

ii) $\det\left(DT\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

iii) $(g \circ T)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = 2x + 2y$ keine konstante Funktion.