H21T2A2

a) Leiten Sie die Werte von $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ aus der Identität $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ab.

b) Geben Sie die Nullstellen des Polynoms $p(z) = z^4 + z^2 + 1$ in Polardarstellung an.

c) Sei N die Nullstellenmenge von p. Bestimmen Sie den Typ der isolierten Singularitäten der Funktion $f: \mathbb{C}\setminus N \to \mathbb{C}\,; z \to \frac{z^2-z+1}{p(z)}$ und geben Sie im Falle eines Pols die Ordnung und das Residuum an.

d) Leiten Sie ausgehend vom Residuensatz eine Formel für das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ab. Begründen Sie hierbei auch, wieso das Integral existiert.

Zu a)

Da $(\sin(z))^2 + (\cos(z))^2 = 1$, folgt aus $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ dann $\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = 1 - \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = \frac{3}{4}$ und da $\sin(x) > 0\ f\ddot{u}r\ x \in\,]0;\pi[$ ist, folgt $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin(\pi - z) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(\pi-z)} - e^{-i(\pi-z)}\right) = \frac{1}{2i}\left(-e^{-iz} - (-1)e^{iz}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \sin(z)$ und $\cos(\pi - z) = \frac{1}{2}\left(e^{i(\pi-z)} + e^{-i(\pi-z)}\right) = \frac{1}{2}\left(-e^{-iz} - e^{iz}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = -\cos(z)$ und damit ist $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Zu b)

$w^2 + w + 1 = 0$ hat die Lösungen $w_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4*1*1}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$.

$z^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ hat die Lösungen $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ und $z_2 = -e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)}$ und $z^2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ hat die Lösungen $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ und $z_4 = -e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{-i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)}$. Dieses sind die vier Nullstellen von p in Polardarstellung

Zu c)

$N = \{z \in \mathbb{C}: p(z) = 0\} = (b) = \left\{\pm e^{i\frac{\pi}{3}}, \pm e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$. Sei $g(z) = z^2 - z + 1$.

Es gilt: $g\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 - e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 =, \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) - \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + 1 =$ $(a) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = 0$ und analog $g\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = 0$.

Damit sind $e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ die beiden einzigen Nullstellen von $g(z) = z^2 - z + 1 = \left(z - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$.

Insgesamt folgt also $f(z) = \frac{\left(z-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}{\left(z-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)} = \frac{1}{\left(z+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}$ und somit gilt:

$\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{3}}} f(z) = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{3}}} \frac{1}{\left(z+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)} = \frac{1}{2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)} \in \mathbb{C}$ und $\lim_{z\to e^{-i\frac{\pi}{3}}} f(z) = \cdots = \frac{1}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)} \in \mathbb{C}$, somit sind $e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ hebbare Singularitäten von f (mit Residuum 0).

$\lim_{z\to -e^{i\frac{\pi}{3}}} |f(z)| = \lim_{z\to -e^{i\frac{\pi}{3}}} \left|\frac{1}{\left(z+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}\right| = \infty = \lim_{z\to -e^{-i\frac{\pi}{3}}} |f(z)|$, deshalb sind $-e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ Pole von f.

Wegen $\lim_{z\to -e^{i\frac{\pi}{3}}} \left(z-\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\right) f(z) = \lim_{z\to -e^{i\frac{\pi}{3}}} \frac{1}{z+e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{-e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{i}{\sqrt{3}}$ und analog $\lim_{z\to -e^{-i\frac{\pi}{3}}} \left(z-\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\right) f(z) = \cdots = -\frac{i}{\sqrt{3}}$ sind $-e^{i\frac{\pi}{3}}$ und $-e^{-i\frac{\pi}{3}}$ Pole erster Ordnung von f mit $Res\left(f, -e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{i}{\sqrt{3}}$ und $Res\left(f, -e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = -\frac{i}{\sqrt{3}}$.

Zu d)

Wegen $N \cap \mathbb{R} = \emptyset$ ist $f|_{\mathbb{R}}$ ein Quotient von zwei nullstellenfreien Polynomen. Da der Grad des Nennerpolynoms 4 = 2 + 2 um zwei größer ist als der Grad des Zählerpolynoms, ist $f|_{\mathbb{R}}$ integrierbar.

Mit $\gamma \coloneqq \gamma_1 \dotplus \gamma_2$ für $\gamma_1\colon [-R,R] \to \mathbb{C}\,; t \to t$ und $\gamma_2\colon [0;\pi] \to \mathbb{C}\,; t \to Re^{it}$ gilt $Spur(\gamma) \cap N = \emptyset$ für R > 1, also folgt nach Residuensatz $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{s\in N} n(\gamma, s) Res(f,s) = (*) = 2\pi i\, Res\left(f, -e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, denn (*): $Res\left(f, e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\right) = 0$ und $n\left(\gamma, -e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 0$ (weil $Im\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}\right) < 0$).

Weiter gilt: $\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\left(Re^{it}\right)^2 - Re^{it}+1}{\left(Re^{it}\right)^4+\left(Re^{it}\right)^2+1} iRe^{it}\, dt\right| \le \int_0^\pi \frac{\left|\left(Re^{it}\right)^2 - Re^{it}+1\right|}{\left|\left(Re^{it}\right)^4+\left(Re^{it}\right)^2+1\right|} \left|iRe^{it}\right| dt = \int_0^\pi \frac{\left|R^{2e^{2it}} - Re^{it}+1\right|}{\left|R^4e^{4it}+R^{2e^{2it}}+1\right|} R\, dt \le (*) \le \int_0^\pi \frac{3R^3}{R^4}\, dt \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, da (*): $R \ge \rho$, vgl. Lemma 19.6.4.

Somit gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)dz = \lim_{R\to\infty} \left(\int_\gamma f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 0 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.