H21T2A1

Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < 1$.

a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} | \; |z| \le r\}$ gleichmäßig gegen die Funktion $f(z) = z/(1-z)$ konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k$ auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} | \; |z| \le r\}$ gleichmäßig gegen die Funktion $g(z) = 1/(1-z)^2$ konvergiert.

c) Zeigen Sie, dass für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{d}z}{1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1}} = 0$$

Lösungsvorschlag:

a) Laut geometrischer Summenformel gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le r$:

$$\sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{z - z^{n+1}}{1-z}$$

Man kann für obige z, n folgern:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z^k - \frac{z}{1-z} \right| = \left| \frac{z - z^{n+1}}{1-z} - \frac{z}{1-z} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \le \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

Es folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|z|\le r} \left| \sum_{k=1}^{n} z^k - \frac{z}{1-z} \right| \le \lim_{n\to\infty} \sup_{|z|\le r} \frac{r^{n+1}}{1-r} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}}{1-r} = 0$$

b) Man kann für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le r$ induktiv zeigen:

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1) z^k = \frac{1 - (n+2)z^{n+1} + (n+1)z^{n+2}}{(1-z)^2} \tag{1}$$

Wie vorhin ist dann

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sup_{|z|\le r} \left| \sum_{k=0}^{n} (k+1) z^k - \frac{1}{(1-z)^2} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{|z|\le r} \left| \frac{(n+1)z^{n+2} - (n+2)z^{n+1}}{(1-z)^2} \right| \\
&\le \lim_{n\to\infty} \sup_{|z|\le r} \frac{(n+1)|z|^{n+2}}{|1-z|^2} + \frac{(n+2)|z|^{n+1}}{|1-z|^2} \\
&\le \lim_{n\to\infty} \sup_{|z|\le r} \frac{(n+1)r^{n+2}}{(1-r)^2} + \frac{(n+2)r^{n+1}}{(1-r)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)r^{n+2}}{(1-r)^2} + \frac{(n+2)r^{n+1}}{(1-r)^2} = 0.
\end{aligned}$$

c) Es sei $n \in \mathbb{N}$ groß. Wir verwenden die Formel (**??**):

$$\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{d}z}{1+2z+3z^2+...+nz^{n-1}} = \int_{|z|=r} \frac{(1-z)^2}{1-(n+2)z^{n+1}+(n+1)z^{n+2}} \ \mathrm{d}z$$

Wir wollen die Nullstellen des Polynoms

$$P : \overline{B_r(0)} \ni z \mapsto 1-(n+2)z^{n+1}+(n+1)z^{n+2}$$

analysieren, wenn $B_r(0)$ die offene Kreisscheibe mit Radius r um den Nullpunkt bezeichnet. Es sei $\hat{r} \in (r,1)$. Dann gilt

$$1 > (n+2)\hat{r}^{n+1} + (n+1)\hat{r}^{n+2}$$

für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$, da $\lim_{n\to\infty}(n+2)\hat{r}^{n+1} + (n+1)\hat{r}^{n+2} = 0$. Nach dem Satz von Rouché besitzt P also keine Nullstellen in $B_{\hat{r}}(0)$ und damit insbesondere keine Nullstellen in $\overline{B_r(0)}$. Damit ist die Abbildung $\nu : B_{\hat{r}}(0) \to \mathbb{C}$,

$$\nu(z) := \frac{(1-z)^2}{1-(n+2)z^{n+1}+(n+1)z^{n+2}} \quad \forall z \in B_{\hat{r}}(0)$$

wohldefiniert und sogar holomorph (als Quotient zweier Polynome, sodass der Nenner keine Nullstelle besitzt). Dann folgt direkt, dass

$$\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{d}z}{1+2z+3z^2+...+nz^{n-1}} = \int_{|z|=r} \nu(z) \ \mathrm{d}z = 0$$

gelten muss.

(JR)