H21T1A5

a) Es sei $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (x, y) \to |x - y|^{1/2}$. Zeigen Sie: ($\mathbb{R}$, d) ist ein metrischer Raum.
b) Es sei m ≥ 1 eine natürliche Zahl, E ⊆ $\mathbb{R}^m$ eine beschränkte offene Menge und $u: \bar{E} \to \mathbb{R}$ eine stetige und in E zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: Falls $\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x) > 0$ für alle x ∈ E, so existiert ein a ∈ ∂E derart, dass $u(a) = \max\{u(x) : x \in \bar{E}\}$.

Zu a)

$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (x, y) \to |x - y|^{1/2}$ macht ($\mathbb{R}$, d) zu einem metrischen Raum, denn

Für x,y ∈ $\mathbb{R}$ ist $|x - y| \geq 0$, also $\sqrt{|x - y|} \in [0; \infty[$ wohldefiniert und $|x - y| = 0$ genau dann wenn x = y, also ist auch d(x, y) = 0 genau dann wenn x = y gilt.

Für alle x,y ∈ $\mathbb{R}$ ist $d(x, y) = \sqrt{|x - y|} = \sqrt{|y - x|} = d(y, x)$.

Für x,y,z ∈ $\mathbb{R}$ gilt nach der Dreiecksungleichung für den Betrag:
$\left(d(x, z)\right)^2 = |x - y| \leq |x - y| + |y - z| \leq |x - y| + |y - z| + 2\sqrt{|x - y|}\sqrt{|y - z|} = \left(\sqrt{|x - y|} + \sqrt{|y - z|}\right)^2 = \left(d(x, y) + d(y, z)\right)^2$ und aus der Monotonie der Wurzel folgt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Zu b)

Voraussetzung: $\sum_{j=1}^{m} \partial_j^2 u(x) > 0$ für alle x ∈ E.

Da E beschränkt ist, ist der Abschluss $\bar{E}$ eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$, also kompakt. Deshalb nimmt die stetige reellwertige Funktion u auf $\bar{E}$ ein Maximum an. Sei nun $a := (a_1, \dots, a_m) \in \bar{E}$ ein Maximum von u.

Angenommen a ∈ E, so erfüllt a als lokales Maximum grad u(a) = 0. Da E offen ist, gibt es ein r > 0 mit $\{y \in \mathbb{R}^m : \|y - a\| < r\} \subseteq E$ und weil a lokales Maximum von u ist, haben die Funktionen $f_j:]a_j - r; a_j + r[\to \mathbb{R}; t \to u(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_m)$ bei a_j ein lokales Maximum. Deshalb ist $f_j'(a_j) = 0$ und $f_j''(a_j) = \partial_j^2 u(a) \leq 0$ (da $f_j''(a_j) > 0$ ein lokales Minimum implizieren würde). Insgesamt ist dann $\sum_{j=1}^{m} \partial_j^2 u(a) \leq 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Somit gilt $a \notin E$. Da aber $a \in \bar{E}$ gilt, muss also $a \in \partial E = \bar{E} \setminus E$ (da E offen) gelten.