H21T1A3

Auf dem Gebiet $\Omega \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\pi\}$betrachten wir die meromorphe Funktion $f(z) \coloneqq \frac{e^z - 1}{\sin(z)}$.

a) Bestimmen Sie alle Singularitäten von f und deren Typ.

b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen Singularitäten.

c) Besitzt die Funktion f eine Stammfunktion auf Ω?

d) Bestimmen Sie $c_1, c_2, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, sodass die Funktion $F(z) \coloneqq f(z) + c_1 \frac{1}{z-a_1} + c_2 \frac{1}{z-a_2}$ auf Ω eine Stammfunktion besitzt.

Zu a) und b)

Da die Nullstellen von sin(z) genau die Vielfachen von π sind, ist $f : \Omega\backslash\{-\pi, 0, \pi\} \to \mathbb{C}\,; z \to \frac{e^z - 1}{\sin(z)}$ holomorph als Quotient holomorpher Funktionen mit nullstellenfreiem Nenner.

Es gilt $\lim\limits_{z\to\pi}|f(z)| = \infty = \lim\limits_{z\to\pi}|f(z)|$ und $\lim\limits_{z\to\pi}(z-\pi)f(z) = \lim\limits_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)(e^z-1)}{\sin(z)} \overset{(1)}{=} -\lim\limits_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)(e^z-1)}{\sin(z-\pi)} = -\lim\limits_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)(e^z-1)}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-\pi)^{2k+1}} = -\lim\limits_{z\to\pi}\frac{(e^z-1)}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-\pi)^{2k}} = (2) = -(e^\pi - 1) = 1 - e^\pi$,

denn (1): $\sin(z-\pi) = -\sin(z)$ und (2): Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-\pi)^{2k}$ konvergiert auf ganz ℂ, insbesondere definiert sie eine ganze Funktion mit $\lim\limits_{z\to\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-\pi)^{2k}\right) = 1$.

Analog zeigt man $\lim\limits_{z\to-\pi}(z+\pi)f(z) = 1 - e^{-\pi}$. Daher sind π und -π Pole erster Ordnung von f mit $Res(f, -\pi) = 1 - e^{-\pi}$ und $Res(f, \pi) = 1 - e^{\pi}$.

Für z = 0 haben sowohl $e^z - 1$ als auch sin(z) eine Nullstelle und $\sin(z) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}z^{2l+1}$ sowie $e^z - 1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right) - \left(\frac{z^0}{0!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$. Also gilt für 0 < |z| < π:

$$\frac{e^z - 1}{\sin(z)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}}{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}z^{2l+1}} = \frac{z\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{k!}\right)}{z\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}z^{2l}\right)} \xrightarrow[z\to 0]{} \frac{1}{1} = 1$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{k!}$ und $\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}z^{2l}$ ganze Funktionen mit Grenzwert 1 (für z→0) definieren. Deshalb hat f bei 0 eine hebbare Singularität mit $Res(f, 0) = 0$.

Zu c)

f hat keine Stammfunktion auf $\Omega\backslash\{-\pi, 0, \pi\}$, denn z.B. $\gamma : [0; 2\pi] \to \Omega\backslash\{-\pi, 0, \pi\}\,; t \to \pi + e^{it}$ ist ein geschlossener C[1]-Weg in $\Omega\backslash\{-\pi, 0, \pi\}$ mit $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\, Res(f, \pi) = 2\pi i(1 - e^\pi) \neq 0$.

Zu d)

$F: \Omega \backslash \{-\pi, 0, \pi\} \to \mathbb{C}\,; z \to f(z) - \frac{Res(f,\pi)}{z-\pi} - \frac{Res(f,-\pi)}{z+\pi}$ ist holomorph. Da Ω als offene Kreisscheibe einfach zusammenhängend ist, ist jeder geschlossene stückweise C^1-Weg in $\Omega \backslash \{-\pi, 0, \pi\}$ auch ein geschlossener stückweiser C^1-Weg in Ω mit $Spur(\gamma) \cap \{-\pi, 0, \pi\} = \emptyset$ und also solcher nullhomolog in Ω. Nach dem Residuensatz gilt dann $\int_\gamma F(z)dz = 2\pi i \Big(\big(n(\gamma, 0)Res(f, 0) + n(\gamma, \pi)Res(f, \pi) + n(\gamma, -\pi)Res(f, -\pi)\big) - n(\gamma, \pi)Res(f, \pi) - n(\gamma, -\pi)Res(f, -\pi)\Big) = 0$ (Da $\frac{Res(f,\pi)}{z-\pi}$ einen Pol erster Ordnung mit Residuum $Res(f, \pi)$ hat und analog).

Da also $\int_\gamma F(z)dz = 0$ für jeden geschlossenen stückweisen C^1-Weg γ in $\Omega \backslash \{-\pi, 0, \pi\}$ gilt, hat F auf $\Omega \backslash \{-\pi, 0, \pi\}$ eine Stammfunktion.

(1)