H21T1A2

Es sei f : ℝ → ℝ eine Lipschitz-stetige Funktion mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(i) f(x) = 0 genau dann, wenn x ∈ {−1, 1}

(ii) f(−2) > 0, f(0) > 0 und f(2) < 0.

Betrachtet wird das Anfangswertproblem x'= f(x), x(0) = ξ (1) mit ξ ∈ ℝ .
Sie dürfen ohne Begründung von der Existenz und Eindeutigkeit einer maximalen Lösung von (1) ausgehen.

a) Bestimmen Sie alle ξ ∈ ℝ, für die die maximale Lösung von (1) streng monoton wächst und alle ξ ∈ ℝ, für die die Lösung von (1) streng monoton fällt. Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.
b) Zeigen Sie: Für jedes ξ ∈ ℝ enthält das Existenzintervall I(ξ) der maximalen Lösung von (1) das Intervall [0, ∞[.
c) Zeigen Sie, dass x = 1 ein asymptotisch stabiler und x = −1 ein instabiler Gleichgewichtspunkt der Differentialgleichung x' = f(x) ist.

Zu a)

Da f stetig und reellwertig ist folgt aus den Voraussetzungen (i) und (ii) nach dem Zwischenwertsatz: $f(x) > 0\ für\ x \in\ ]-\infty;-1[$, $f(x) > 0\ für\ x \in\ ]-1;1[$ und $f(x) > 0\ für\ x \in\ ]1;\infty[$. (2)

Für alle ξ ∈ ℝ hat (1) eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_\xi: \left]a_\xi; b_\xi\right[\to \mathbb{R}$ mit $a_\xi < 0 < b_\xi$.

Nach (i) sind $\lambda_{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; x \to -1$ und $\lambda_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; x \to 1$ die einzigen konstanten Lösungen von (1). Da die Graphen maximaler Lösungen disjunkt sind, folgt aus dem Zwischenwertsatz

$$\lambda_\xi(t) \in \begin{cases}]-\infty;-1[\ \forall t \in \left]a_\xi; b_\xi\right[& für\ \xi \in\ ]-\infty;-1[\\ ]-1;1[\ \forall t \in \left]a_\xi; b_\xi\right[& für\ \xi \in\ ]-1;1[\\ ]1;\infty[\ \forall t \in \left]a_\xi; b_\xi\right[& für\ \xi \in\ ]1;\infty[\end{cases}$$ In Verbindung mit (2) folgt

$$\lambda_\xi'(t) = f\big(\lambda_\xi(t)\big) \begin{cases} > 0 & für\ \xi \in\ ]-\infty;-1[\\ > 0 & für\ \xi \in\ ]-1;1[\\ < 0 & für\ \xi \in\ ]1;\infty[\end{cases}$$ also ist

$$\lambda_\xi \begin{cases} str.mon.steigend & für\ \xi \in\ ]-\infty;1[\ \cup\ ]-1;1[\\ str.mon.fallend & für\ \xi \in\ ]1;\infty[\\ konstant & für\ \xi \in \{\pm 1\} \end{cases}$$

Zu b)

Zu zeigen ist: $\left]a_\xi; b_\xi\right[\ \supseteq\ ]0;\infty[$, d.h. $a_\xi < 0$ und $b_\xi = \infty$.

$a_\xi < 0$ ist automatisch erfüllt, da x(0) = ξ, also $0 \in \left]a_\xi; b_\xi\right[$. Für $b_\xi = \infty$ betrachte die vier Fälle:

Fall 1: $\xi \in\ ]-\infty;1[$. Da λ_ξ streng monoton steigend und $\lambda_\xi\left(\left]a_\xi; b_\xi\right[\right) \subseteq\ ]-\infty;-1[$ ist, gilt

$\Gamma_+(\lambda_\xi) := \{(t, \lambda_\xi(t)) : t \in [0; b_\xi[\} \subseteq [0; b_\xi[\times [\xi; -1[$ und im Fall $b_\xi < \infty$ folgt, dass $\overline{\Gamma_+(\lambda_\xi)} \subseteq [0; b_\xi] \times [\xi; -1]$ eine relativ kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist, was im Widerspruch zur Charakterisierung der maximalen Lösung steht.

Fall 2: $\xi \in]-1; 1[$ → analog zu 1.

Fall 3: $\xi \in]1; \infty[$. Da λ_ξ streng monoton fallend und $\lambda_\xi(]a_\xi; b_\xi[) \subseteq]1; \infty[$ ist, gilt

$\Gamma_+(\lambda_\xi) := \{(t, \lambda_\xi(t)) : t \in [0; b_\xi[\} \subseteq [0; b_\xi[\times [1; \xi[$ und im Fall $b_\xi < \infty$ folgt, dass $\overline{\Gamma_+(\lambda_\xi)} \subseteq [0; b_\xi] \times [1; \xi]$ eine relativ kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist, was im Widerspruch zur Charakterisierung der maximalen Lösung steht.

Fall 4: $\xi \in \{\pm 1\}$. Hier ist λ_ξ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Somit gilt in allen vier Fällen $b_\xi = \infty$, also insgesamt $]a_\xi; b_\xi[\supseteq]0; \infty[$.

Zu c)

(i) Für $\xi \in]-1; 1[$ ist λ_ξ streng monoton steigend und durch 1 nach oben beschränkt, also existiert $c := \lim\limits_{t\to\infty} \lambda_\xi(t) = \sup\{\lambda_\xi(t): t \geq 0\} \in]-1; 1[$. Angenommen c < 1, dann ist $\lambda_\xi(t) = \xi + \int_0^t \lambda'_\xi(s)ds = \xi + \int_0^t f\left(\lambda_\xi(t)\right) ds \geq \xi + t \underbrace{\inf\{f(s): s \in [\xi; c]\}}_{>0\, nach\, (a)} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$, was im Widerspruch zu $\lambda_\xi(t) < 1$ steht. Damit ist $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_\xi(t) = 1$ für $\xi \in]-1; 1[$.

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_1(t) = 1$ folgt direkt aus der Definition.

(iii) Für $\xi \in]1; \infty[$ ist λ_ξ streng monoton fallend und durch 1 nach unten beschränkt, also existiert $b := \lim\limits_{t\to\infty} \lambda_\xi(t) = \inf\{\lambda_\xi(t): t \geq 0\} \in]1; \infty[$. Angenommen b > 1, dann ist $\lambda_\xi(t) = \xi + \int_0^t \lambda'_\xi(s)ds = \xi + \int_0^t f\left(\lambda_\xi(t)\right) ds \leq \xi + t \underbrace{\sup\{f(s): s \in [\xi; c]\}}_{<0\, nach\, (a)} \xrightarrow[t\to\infty]{} -\infty$, was im Widerspruch zu $\lambda_\xi(t) > 1$ steht. Damit ist $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_\xi(t) = 1$ für $\xi \in]1; \infty[$.

Insgesamt ist also $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_\xi(t) = 1$ für $\xi \in]-1; \infty[$ also hat die Ruhelage 1 den Einzugsbereich $]-1; \infty[$ und ist damit attraktiv. Da f reellwertig und (lokal) Lipschitz-stetig ist, ist jede attraktive Ruhelage auch stabil, insgesamt also asymptotisch stabil.

Für $\xi \in]-1; 1[$ ist λ_ξ streng monoton steigend mit $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_\xi(t) = 1$. Somit gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $T_{\xi,\varepsilon} > 0$ mit $\lambda_\xi(t) > \xi + \varepsilon$ für alle $t \geq T_{\xi,\varepsilon}$, und daher ist $|\lambda_{-1}(t) - \lambda_\xi(t)| = |-1 - \lambda_\xi(t)| \geq |-1 - (\xi + \varepsilon)| \geq \varepsilon$ (da $-1 < \xi < \xi+\varepsilon$), also kann die Ruhelage -1 nicht stabil sein.