H20T3A5

Gegeben sind drei Folgen von stetigen Funktionen $\left(f_n: [0;1] \to \mathbb{R}; x \to \sqrt{x}e^{-nx}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(g_n: [0;1] \to \mathbb{R}; x \to n\sqrt{x}e^{-nx}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(h_n: [0;1] \to \mathbb{R}; x \to n^2\sqrt{x}e^{-nx}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Entscheiden Sie jeweils (mit Begründung), welche dieser drei Folgen

a) beschränkt in $C^0([0,1])$ ist
b) punktweise konvergiert
c) gleichmäßig konvergiert
d) konvergentes Integral hat (d.h. entscheiden Sie, ob $\int_0^1 f_n(x)dx$, $\int_0^1 g_n(x)dx$, $\int_0^1 h_n(x)dx$ konvergieren).

Zu a)

$$f_n'(x) = \frac{e^{-nx}}{2\sqrt{x}}(1-2nx) = \begin{cases} > 0\,;\ x \in \,]0; 1/2n\,[\\ = 0\,;\ x = 1/2n \\ < 0\,;\ x \in \,]\,1/2n\,; 1[\end{cases} \quad \text{für } x \in \,]0;1[$$

Dann gilt: $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \max\{f_n(x): x \in [0;1]\} = \frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}}$ und analog

$g_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \max\{g_n(x): x \in [0;1]\} = \sqrt{\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ und $h_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \max\{h_n(x): x \in [0;1]\} = \sqrt{\frac{n^3}{2}}e^{-\frac{1}{2}}$

Damit ist $\sup\left\{||f_n||: n \in \mathbb{N}\right\} = \sup\{\sup\{|f_n(x)|: x \in [0;1]\}: n \in \mathbb{N}\} = \sup\left\{\frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}} : n \in \mathbb{N}\right\} = e^{-\frac{1}{2}} < \infty$. Ebenso gilt $\sup\left\{||g_n||: n \in \mathbb{N}\right\} = \sup\left\{\sqrt{\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}} : n \in \mathbb{N}\right\} = \infty = \sup\left\{||h_n||: n \in \mathbb{N}\right\}$.

Zu b)

$f_n(x) = \sqrt{x}e^{-nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, denn f(0) = 0 und für x > 0 gilt $e^{-nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$g_n(x) = n\sqrt{x}e^{-nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, denn g(0) = 0 und für x > 0 gilt $ne^{-nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$h_n(x) = n^2\sqrt{x}e^{-nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, denn h(0) = 0 und für x > 0 gilt $n^2e^{-nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Alle drei Folgen konvergieren punktweise gegen 0 auf dem Intervall [0; 1].

Zu c)

$||f_n - 0||_\infty = \sup\{|f_n(x) - 0|: x \in [0;1]\} = (a) = \frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, d.h. f_n konvergiert gleichmäßig gegen 0 auf dem Intervall [0; 1].

$||g_n - 0||_\infty = \sqrt{\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ und $||h_n - 0||_\infty = \sqrt{\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ bleiben nicht beschränkt, also konvergiert weder g_n noch h_n gleichmäßig gegen 0.

Zu d)

$|f_n(x)| = f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2}} \leq e^{-\frac{1}{2}}$ für alle $x \in [0;1], n \in \mathbb{N}$. Damit ist $m: [0;1] \to [0;\infty[\,; x \to e^{-\frac{1}{2}}$ eine integrierbare Majorante für alle f_n. Wegen $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gilt $\int_0^1 f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 0\,dx = 0$ nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz.

Mit $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; x \to nx$ ist $\varphi'(x) = n$, also $\int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 n\sqrt{x}e^{-nx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^1 \sqrt{\varphi(x)}e^{-\varphi(x)}\varphi'(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\varphi(0)=0}^{\varphi(1)=n} \sqrt{x}e^{-x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,dx + \int_1^n \sqrt{x}e^{-x}\,dx\right)$.

$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,dx$ existiert als Integral einer stetigen Funktion auf dem kompakten Intervall [0; 1] daher ist $\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Für $x \geq 1$ $gilt$ $1 \leq \sqrt{x} \leq x$, also $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n \sqrt{x}e^{-x}\,dx \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n xe^{-x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\left([x(-e^{-x})]_1^n - \int_1^n -e^{-x}\,dx\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}(e^{-1} - ne^{-n} + [-e^{-x}]_1^n) = \frac{1}{\sqrt{n}}(2e^{-1} - (n+1)e^{-n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und somit $\int_0^1 g_n(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^n \sqrt{x}e^{-x}\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Es gilt $\int_0^1 h_n(x)\,dx = \int_0^1 n^2\sqrt{x}e^{-nx}\,dx = \sqrt{n}\int_0^n \sqrt{x}e^{-x}\,dx \geq \sqrt{n}\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,dx$, also ist $\left\{\int_0^1 h_n(x)\,dx : n \in \mathbb{N}\right\}$ unbeschränkt.