Herbst 20 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = (x^2 + y^2)\sqrt{|y|}$$
$$\dot{y} = \frac{1}{y^{42}+1} + \exp(t).$$

a) Begründen Sie, warum zu jedem Anfangswert $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung des Systems existiert.

b) Sei $J \subset \mathbb{R}$ das maximale Existenzintervall der eindeutigen Lösung mit Anfangswert $(x(0), y(0)) = (1{,}1)$. Zeigen Sie, dass $\sup J \leq 1$ gilt und untersuchen Sie das Verhalten von $(x(t), y(t))$ bei $t \nearrow \sup J$.
Hinweis: Bestimmen Sie als Vorüberlegung explizit die Lösung z zur Differentialgleichung $\dot{z} = z^2$ mit Anfangswert $z(0) = 1$ und überlegen Sie sich das zugehörige maximale Existenzintervall.

Lösungsvorschlag:

a) Wir betrachten zunächst die zweite Gleichung. Diese ist eine Differentialgleichung erster Ordnung mit stetig differenzierbarer, also lokal lipschitzstetiger Strukturfunktion, also gibt es zu jedem Anfangswert $y(0)$ eine eindeutige Lösung y auf einem offenen Intervall, welches die 0 enthält. Weil für alle $y \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen $0 < \frac{1}{y^{42}+1} \leq 1$ gelten, ist das Wachstum in der zweiten Differentialgleichung linear beschränkt und die lokale Lösung lässt sich auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.
Wir setzen jetzt die Lösung y in die erste Differentialgleichung ein. Damit wird die erste Gleichung ebenso zu einer Differentialgleichung erster Ordnung, deren Strukturfunktion stetig und stetig partiell differenzierbar nach x, also lokal lipschitzstetig bezüglich x, ist. Also gibt es auch zu jedem Anfangswert $x(0)$ eine eindeutige Lösung der ersten Gleichung nach dem Satz von Picard-Lindelöf. Das Paar (x, y) der Lösungen löst nun das Differentialgleichungssystem. Außerdem ist es die einzige Lösung, weil sonst mindestens eine der beiden Gleichungen mehrere Lösungen hätte, was wir bereits ausgeschlossen haben.

b) Durch Raten, Frobeniusansatz oder Trennung der Variablen findet man die Maximallösung $z : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}, z(t) = \frac{1}{1-t}$ des Anfangswertproblems aus dem Hinweis. In a) hatten wir gesehen, dass die Lösung der zweiten Gleichung y global existiert, wir erhalten daher, dass das Lösungsintervall der Systemlösung genau das der Lösung der ersten Gleichung x ist.
Es ist $y' > 0$ woraus wir schließen können, dass die Lösung y streng monoton steigt und wegen der Anfangsbedingung gilt $y(t) \geq 1$ für $0 \leq t < \sup J$. Daraus folgt auch $\sqrt{|y|(t)} \geq 1$ für diese t und wir erhalten $x' > x^2$ für die Lösung x. Es folgt weiter $x'(0) = 2 > 1 = z'(0)$ und wegen $x(0) = 1 = z(0)$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $x(t) > z(t)$ auf $(0, \varepsilon)$ gilt.
Diese Ungleichung gilt sogar auf $(0, \sup\ J)$, denn wäre das nicht der Fall so gäbe es ein $s \in (0, \sup\ J)$ mit $x(t) \leq z(t)$ und wegen des Zwischenwertsatzes gäbe es eine Stelle $\tilde{t} \in (0, s)$ mit $x(\tilde{t}) = z(\tilde{t})$. Wir wählen jetzt das Minimum M der

Menge $\{s \in [\frac{\varepsilon}{2}, \tilde{t}] : x(s) = z(s)\}$, welches existiert, weil die Menge abgeschlossen, beschränkt und nichtleer ist. Es muss dann $x(t) > z(t)$ für $t \in (0, M)$ gelten, sonst würde eine kleinere Nullstelle als M in $[\frac{\varepsilon}{2}, \tilde{t}]$ existieren, was nicht sein kann. Dann ist aber $x'(t) > z'(t)$ und daher $x - z$ streng monoton wachsend auf $(0, M)$ und es gilt $(x - z)(0) = 0 = (x - z)(\tilde{t})$, ein Widerspruch. Also muss $x(t) > z(t)$ auf $(0, \sup\ J)$ gelten.
Daraus folgt aber sofort $\sup J \leq 1$, weil z bei $t = 1$ explodiert, also auch x für $t \to 1$ gegen $+\infty$ konvergiert. Also erhalten wir zudem $x(t) \to +\infty$ für $t \nearrow \sup J$. Weil y global existiert, monoton wachsend und stetig ist, gilt $y(t) \to y(\sup J)$ für $t \nearrow \sup J$. Wir haben damit auch das Randverhalten der Lösung durch $(x(t), y(t)) \to (+\infty, y(\sup J))$ für $t \nearrow \sup J$ bestimmt.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$