H20T3A3

a) Sei n ∈ ℕ. Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\Gamma \frac{e^{2iz}}{\cosh(z)}dz$, wobei Γ der Weg ist, der das Rechteck $R = \{z \in \mathbb{C} : -n \leq Re(z) \leq n, 0 \leq Im(z) \leq n\pi\} = [-n; n] \times [0; n\pi]$ im Gegenuhrzeigersinn umschließt.

b) Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2iz}}{\cosh(z)}dz$ unter Verwendung von (a) und stellen Sie es als Reihe dar. Begründen Sie die Zwischenschritte.

Zu a)

$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \frac{1}{2e^z}(e^z + 1)$ hat die Nullstellen bei $\xi_k = \frac{i\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}$. Daher ist $f: \mathbb{C}\backslash\{\xi_k: k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}, z \to \frac{e^{2iz}}{\cosh(z)}$ als Quotient holomorpher Funktionen mit nullstellenfreiem Nenner holomorph.

Als geschlossene Kurve ist Γ nullhomolog in $\mathbb{C} = (\mathbb{C}\backslash\{\xi_k: k \in \mathbb{Z}\}) \cup \{\xi_k: k \in \mathbb{Z}\}$ und $spur(\Gamma) \cap \{\xi_k: k \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$ und es gilt $n(\Gamma, \xi_k) = \begin{cases} 1, 0 \leq k \leq n-1 \\ 0 \quad sonst \end{cases}$. Somit gilt nach dem Residuensatz $\int_\Gamma f(z) = 2\pi i \sum_{k\in\mathbb{Z}} n(\Gamma, \xi_k) Res(f, \xi_k) = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} Res(f, \xi_k)$.

$\lim_{z\to\xi_k} |f(z)| = \lim_{z\to\xi_k} \left|\frac{2e^z e^{2iz}}{e^{2z}+1}\right| = \infty$, deshalb ist jede Singularität ein Pol von f. Die ganze Funktion cosh besitzt um ξ_k die Potenzreihenentwicklung $\cosh(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \cosh^{(\mathrm{m})}(\xi_k)\,(z-\xi_k)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \cosh^{(2\mathrm{m})}(\xi_k)\,(z-\xi_k)^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \cosh^{(2\mathrm{m}+1)}(\xi_k)\,(z-\xi_k)^{2m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \cosh(\xi_k)\,(z-\xi_k)^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \sinh(\xi_k)\,(z-\xi_k)^{2m+1} =$

$0 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{(2m+1)!}(z-\xi_k)^{2m+1}$; diese Reihe konvergiert auf ℂ. Daher existiert $\lim_{z\to\xi_k}(z-\xi_k)f(z) = \lim_{z\to\xi_k} \frac{(z-\xi_k)e^{2iz}}{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{i}{(2m+1)!}(z-\xi_k)^{2m+1}} = \lim_{z\to\xi_k} \frac{e^{2iz}}{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{i}{(2m+1)!}(z-\xi_k)^{2m}} = \frac{e^{2i\xi_k}}{i} = -ie^{-\pi(2k+1)}$ und deshalb ist ξ_k ein Pol erster Ordnung mit $Res(f, \xi_k) = -ie^{-\pi(2k+1)} = -ie^{-\pi}(e^{-2\pi})^k$.

Daher ist $\int_\Gamma f(z) = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} Res(f, \xi_k) = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} -ie^{-\pi}(e^{-2\pi})^k = 2\pi e^{-\pi} \sum_{k=0}^{n-1}(e^{-2\pi})^k = 2\pi e^{-\pi} \frac{1-(e^{-2\pi})^n}{1-e^{-2\pi}}$.

Zu b)

Für x∈ℝ ist $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \geq \frac{1}{2}e^{|x|}, also$ $\left|\frac{e^{2ix}}{\cosh(x)}\right| \leq 2e^{-|x|}$ und da $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^x dx + \int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-n}^{0} e^x dx + \int_0^n e^{-x}dx\right) = \lim_{n\to\infty}([e^x]_{-n}^0 + [-e^{-x}]_0^n) = 2$ gilt, ist $f|_\mathbb{R}$ integrierbar.

Mit $\Gamma = \Gamma_1 \dotplus \Gamma_2 \dotplus \Gamma_3 \dotplus \Gamma_4$ für $\Gamma_1: [-n; n] \to \mathbb{C}; t \to t,\ \Gamma_2: [0; n] \to \mathbb{C}; t \to n + i\pi t,$

$-\Gamma_3: [-n; n] \to \mathbb{C}; t \to t + in\pi, -\Gamma_4: [0; n] \to \mathbb{C}; t \to -n + i\pi t$ ist dann

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2iz}}{\cosh(z)} dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_1} f(z)dz.$

$\left|\int_{\Gamma_3} f(z)dz\right| = \left|-\int_{-n}^{n} \frac{e^{2i(t+in\pi)}}{\cosh(t+in\pi)} dt\right| \leq \int_{-n}^{n} \frac{|e^{2i(t+in\pi)}|}{|\cosh(t+in\pi)|} dt \overset{(1)}{=} \int_{-n}^{n} \frac{e^{2n\pi}}{\cosh(t)} dt \overset{(2)}{\leq} 2ne^{-2n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(1) $\cosh(t+in\pi) = \frac{1}{2}\left(e^{t+in\pi} + e^{-t-in\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(e^t e^{in\pi} + e^{-t}e^{-in\pi}\right) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})e^{in\pi} + \frac{1}{2}e^{-t}\left(e^{-in\pi} - e^{in\pi}\right) = \cosh(t)\, e^{in\pi} + 0.$

(2) $\cosh(t) \geq 1$ für $t \in \mathbb{R}$

Es gilt $\cosh(z + 2\pi ik) = \cosh(z)\ \ f\ddot{u}r\ alle\ z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$

Auf der kompakten Menge $\{n + i\pi t : t \in [0; 2\pi]\}$ nimmt die stetige reellwertige Funktion |cosh| ein Minimum an. Da cosh nur auf $\left\{\frac{i\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}\right\}$ Nullstellen besitzt, ist $\coloneqq$ $c \coloneqq \min\{|\cosh(n + i\pi t)| : t \in [0; 2\pi]\} > 0$. Weiter ist $\{\cosh(n + i\pi t) : t \in [0; 2\pi]\} = \{\cosh(n + i\pi t) : t \geq 0\}$, also $c = \min\{|\cosh(n + i\pi t)| : t \geq 0\}$.

Mit $\cosh(n + i\pi t) = \frac{1}{2}\left(e^n e^{i\pi t} + e^{-n}e^{-i\pi t}\right) = \frac{1}{2}(e^n + e^{-n})e^{i\pi t} + \frac{1}{2}e^{-n}\left(e^{-i\pi t} - e^{i\pi t}\right) = \cosh(n)\, e^{i\pi t} - i\sin(\pi t)e^{-n}$ folgt $|\cosh(n + i\pi t)| = \left|\cosh(n)\, e^{i\pi t} - i\sin(\pi t)e^{-n}\right| \geq |\cosh(n) - |\sin(\pi t)|e^{-n}| \geq \cosh(n) - e^{-n}$,
also $c = \min\{|\cosh(n + i\pi t)| : t \geq 0\} \geq \cosh(n) - e^{-n} > 0\ f\ddot{u}r\ alle\ n \in \mathbb{N}$. Damit ist
$\left|\int_{\Gamma_2} f(z)dz\right| = \left|\int_0^n \frac{e^{2i(n+i\pi t)}}{\cosh(n+i\pi t)} i\pi\, dt\right| \leq \pi \int_0^n \frac{|e^{2i(n+i\pi t)}|}{|\cosh(n+i\pi t)|} dt \leq \pi \int_0^n \frac{e^{-2\pi t}}{c} dt \leq \frac{\pi}{c}\left[\frac{e^{-2\pi t}}{-2\pi}\right]_0^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Analog zeigt man $|\cosh(-n + i\pi t)| = \left|\cosh(n)\, e^{-i\pi t} - i\sin(\pi t)e^{-n}\right| \geq \cosh(n) - e^{-n}$ und damit $\left|\int_{\Gamma_4} f(z)dz\right| \leq \pi \int_0^n \frac{e^{-2\pi t}}{c} dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Daraus folgt $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2iz}}{\cosh(z)} dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_1} f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_1} f(z)dz + 0 + 0 + 0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)dz = (a) = \lim_{n\to\infty}\left(2\pi e^{-\pi} \frac{1-\left(e^{-2\pi}\right)^n}{1-e^{-2\pi}}\right) = \frac{2\pi}{e^{\pi}-e^{-\pi}} = \frac{\pi}{\sinh(\pi)} = 2\pi e^{-\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{2\pi}}\right)^k.$