H20T2A5

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die Aussage: Die konstante Funktion h : ℂ → ℂ; z → 1 ist die einzige unter den holomorphen Funktionen f : ℂ → ℂ mit

a) $f\left(\exp\left(\frac{\pi i n}{2020}\right)\right) = 1$ für alle n ∈ ℕ.
b) f(z) = 1 für alle z ∈ ℂ mit |z| = 1.
c) $f\left(\exp\left(\frac{in}{2020}\right)\right) = 1$ für alle n ∈ ℕ.

Zu a)

FALSCH. Gegenbeispiel:

$g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \to z^{4040}$ erfüllt $g\left(\exp\left(\frac{\pi i n}{2020}\right)\right) = \exp(2\pi i n) = 1$ für alle n ∈ ℕ. Und g nicht konstant, da z.B. g(0) = 0

Beachte: mit $\xi := e^{\frac{i\pi}{2020}}$ ist $\left\{\exp\left(\frac{i\pi n}{2020}\right) : \text{n} \in \mathbb{N}\right\} = \{\xi^n : \text{n} \in \mathbb{N}\} = \{1, \xi, \dots, \xi^{4039}\}$ eine endliche Menge, hat also keinen Häufungspunkt, sodass der Identitätssatz nicht anwendbar ist.

Alternatives Beispiel: $\tilde{g} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \to 1 + (z-1)(z-\xi)(z-\xi^2) \dots (z-\xi^{4039})$.

Zu b)

WAHR.

f(z) = 1 = h(z) für alle z ∈ ℂ mit |z| = 1. Also $\{z \in \mathbb{C} : f(z) = h(z)\} \supseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, diese hat einen Häufungspunkt[1] in ℂ. Somit folgt f = g nach dem Identitätssatz, d.h. h ist die einzige holomorphe Funktion mit diesen Eigenschaften.

Zu c)

Da $e^z = e^w$ genau dann gilt, wenn z-w = 2kπi, k∈ℤ, und da für alle m,n∈ℕ mit m≠n gilt $\frac{in}{2020} - \frac{im}{2020} \neq 2k\pi i$ (weil π irrational ist), sind alle Folgenglieder von $\left(e^{\frac{in}{2020}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise verschieden. Damit ist jeder Häufungspunkt dieser Folge auch ein Häufungspunkt der Menge aller Folgenglieder $\left\{e^{\frac{in}{2020}} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Da $\left(e^{\frac{in}{2020}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in der kompakten[2] Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ist (*), besitzt sie nach der Charakterisierung kompakter Teilmengen eines metrischen Raums eine konvergente Teilfolge, also

[1] Dass der Rand des Einheitskreises einen Häufungspunkt besitzt, darf normalerweise als bekannt vorausgesetzt werden; zur Vollständigkeit hier ein kurzer Beweis: Für $z \in \mathbb{C} : |z| = 1$ sei U eine Umgebung von z, dann gibt es r > 0 mit $\{w \in \mathbb{C} : |z-w| < r\} \subseteq U$, also ist $\emptyset \neq \{w \in \mathbb{C} : 0 < |z-w| < r\} \cap \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\} \subseteq (U \backslash z) \cap \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$, weshalb z ein Häufungspunkt ist.

[2] Dass der Rand des Einheitskreises kompakt ist, darf normalerweise als bekannt vorausgesetzt werden; zur Vollständigkeit hier ein kurzer Beweis: Sei $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+; z \to |z|$; diese Abbildung ist stetig und es gilt $\{z \in \mathbb{C} : |z| =$

einen Häufungswert. Damit hat $\left\{e^{\frac{in}{2020}} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 1 = h(z)\}$ einen Häufungspunkt und nach dem Identitätssatz folgt f = h, d.h. h ist die einzige holomorphe Funktion mit diesen Eigenschaften.

$1\} = \varphi^{-1}(\{1\})$ ist als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1\}$ selbst abgeschlossen. Zusätzlich ist $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ beschränkt und somit kompakt.