H20T2A4

Es sei $f: \mathbb{C}\backslash\{-1,0,1\} \to \mathbb{C}; z \to \frac{1}{1+z}\sin\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{\sin(z-1)}{z-1}$. Bestimmen Sie

a) bei 1
b) bei −1 und
c) bei 0

jeweils den Typ der isolierten Singularität von f und berechnen Sie das Residuum.

Zu a)

$\frac{\sin(z-1)}{z-1} = \frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}(z-1)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-1)^{2k}$. Da diese Potenzreihe für alle z∈ℂ konvergiert, ist $\lim_{z\to 1}\frac{\sin(z-1)}{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-1)^{2k}|_{z=1} = 1$, also $\lim_{z\to 1} f(z) = \frac{1}{2}\sin(1) + 1 \in \mathbb{R}$, daher ist 1 eine hebbare Singularität von f, also Res(f,1) = 0

Zu b)

$\lim_{z\to -1}|f(z)| = \infty$, also ist -1 ein Pol von f. $\lim_{z\to -1}\big(z-(-1)\big)f(z) = \lim_{z\to -1}\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{\sin(z-1)(z+1)}{z-1}\right) = \sin(-1)$, daher ist -1 ein Pol erster Ordnung von f und Res(f,-1) = sin(-1).

Zu c)

Da $f_1: \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}; z \to \frac{\sin(z-1)}{z-1}$ in einer Umgebung von 0 holomorph ist, haben $f_2: \mathbb{C}\backslash\{-1,0\} \to \mathbb{C}; z \to \frac{1}{1+z}\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ und $f = f_1 + f_2$ denselben Hauptteil in 0, also denselben Typ Singularität und dasselbe Residuum.

Da $\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}\frac{1}{z^{2k+1}}$ für z ≠ 0 und $\frac{1}{1+z} = \sum_{l=0}^{\infty}(-z)^l \; f\ddot{u}r\ |z| < 1$ gilt, so ist $f_2(z) = \left(\sum_{l=0}^{\infty}(-z)^l\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}\frac{1}{z^{2k+1}}\right) = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m\right)\left(\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(-1)^l}{(2k+1)!}\right)$, m = l-(2k+1) die Laurentreihenentwicklung von f_2 um 0.

$(w_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{k\pi}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\frac{(4k+1)\pi}{2}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sind Folgen in ℂ\{0} mit $\lim_{k\to\infty} w_k = 0 = \lim_{k\to\infty} z_k$; $f_2(w_k) = \frac{1}{1+w_k}\sin\left(\frac{1}{w_k}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{k\pi}}\sin(k\pi) = 0$ und $f_2(z_k) = \frac{1}{1+z_k}\sin\left(\frac{1}{z_k}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{(4k+1)\pi}{2}}}\sin\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right)$ mit $\lim_{k\to\infty} f_2(z_k) = 1 \neq 0 = \lim_{k\to\infty} f_2(w_k)$. Deshalb hat f_2 (und f) bei 0 eine wesentliche Singularität.

Mit $m = l - (2k+1) = -1$, also $l = 2k$, also $(-1)^l = 1$ ist der Laurentkoeffizient von z^{-1} gegeben durch $\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(-1)^l}{(2k+1)!} = \sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = \sin(1) = Res(f,0)$.