H20T2A2

Es sei f :]0, ∞[→ ℝ gegeben durch $f(x) = \frac{\sqrt{|x^2-1|}}{x}$. Weiter sei $\xi > 1$.

a) Zeigen Sie, dass es ein offenes Intervall I_ξ mit $0 \in I_\xi$ gibt, so dass
   $x' = f(x),\ x(0) = \xi$ (1)
   eine eindeutige Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$ auf I_ξ besitzt.
b) Berechnen Sie die Lösung λ_ξ und zeigen Sie damit, dass man immer $[0, \infty[\subseteq I_\xi$ erreichen kann.
c) Geben Sie eine auf ganz ℝ definierte Lösung $\mu_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems (1) an.

Zu a)

$g: f|_{]1,\infty[} :]1, \infty[\to \mathbb{R}; x \to \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ist stetig differenzierbar, also hat $x' = f|_{]1,\infty[}(x),\ x(0)=\xi$ (2) nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz eine eindeutige maximale Lösung.

Da jede Lösung von (2) auch eine Lösung von (1) ist und da wegen $\xi \in]1,\infty[$ jede Lösung λ von (1) auf dem Intervall um 0 mit $\lambda(t)>1$ auch (2) löst, ergibt die maximale Lösung von (2) eine lokal eindeutige Lösung von (1)

Zu b)

Mit Trennen der Variablen ergibt sich eine Lösung $\lambda(t)>1$:

$\int_\xi^{\lambda(t)} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \sqrt{x^2-1}\,|_\xi^{\lambda(t)} = \sqrt{\left(\lambda(t)\right)^2 - 1} - \sqrt{\xi^2-1} = \int_0^t 1 ds = t$ und somit

$\left(\lambda(t)\right)^2 = \left(t + \sqrt{\xi^2-1}\right)^2 + 1$ und $\lambda(t) = \pm\sqrt{\left(t + \sqrt{\xi^2-1}\right)^2 + 1}$. Mit $\lambda(0) = \pm\sqrt{\xi^2} = \pm|\xi|$ und $\lambda(0) = \xi > 1$ kann der Fall $\lambda(t) = -\sqrt{\ldots}$ ausgeschlossen werden. λ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert.

$\lambda'(t) = \frac{2\left(t+\sqrt{\xi^2-1}\right)}{2\sqrt{1+\left(t+\sqrt{\xi^2-2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\left(t+\sqrt{\xi^2-1}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(t+\sqrt{\xi^2-2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\left|\left(t+\sqrt{\xi^2-1}\right)^2+1-1\right|}}{\sqrt{1+\left(t+\sqrt{\xi^2-2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\left|\left(\lambda(t)\right)^2-1\right|}}{\lambda(t)}$. Diese Gleichung gilt nur für $t + \sqrt{\xi^2-1} > 0$.

Da $\lambda\left(-\sqrt{\xi^2-1}\right) = 1$, gibt $\lambda_\xi :] -\sqrt{\xi^2-1}, \infty[\to \mathbb{R}; t \to \sqrt{1 + \left(t + \sqrt{\xi^2-2}\right)^2}$ eine Lösung von (2), die wegen $\lim_{t \searrow -\sqrt{\xi^2-1}} \lambda_\xi(t) = 1$ und $\lim_{t \searrow -\sqrt{\xi^2-1}} dist\left(\left(t, \lambda_\xi(t)\right), \partial(\mathbb{R} \times]1, \infty[)\right) = 0$ das Randverhalten der maximalen Lösung von (2) hat und daher die maximale Lösung ist. Insbesondere ist $[0, \infty[\ \subseteq I_\xi \subseteq\ ] -\sqrt{\xi^2-1}, \infty[$.

Zu c)

Da f(1) = 0, löst $\lambda_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \to 1$ das Anfangswertproblem x‘ = f(x), x(τ) = 1.

Dann sind λ_ξ und $\lambda_1 :]-\infty,]-\sqrt{\xi^2-1}], t \to 1$ Lösungen von x' = f(x), die sich wegen $\lim\limits_{t \searrow -\sqrt{\xi^2-1}} \lambda_\xi(t) = 1$ zu einer Lösung $\mu_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \to \begin{cases} 1 & , t \leq -\sqrt{\xi^2-1} \\ \lambda_\xi(t), & t > -\sqrt{\xi^2-1} \end{cases}$ zusammensetzen lassen, die $\mu_\xi(0) = \xi$ erfüllt.