H20T2A1

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte und deren Art für die Funktion
   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \to x^2 + (\sin y)^2$

b) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems
   $x' = \sin(y)\cos(y)$
   $y' = -x$
   und untersuchen Sie, welche stationären Lösungen stabil bzw. instabil sind.

Zu a)

Kritische Punkte von f sind die Nullstellen von $f'(x,y) = (gradf)(x,y) = \binom{2x}{2\sin(y)\cos(y)} = \binom{0}{0}$, d.h. x=0 und $y \in \pi\mathbb{Z}$ (dh sin(y)=0) oder $y \in \pi\mathbb{Z} + \pi/2$ (dh cos(y)=0). Somit sind die kritischen Punkte von f gegeben durch $(0, k\pi)$ und $(0, k\pi+\pi/2)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

$$(Hessf)\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2(\cos y)^2 - 2(\sin y)^2 \end{pmatrix}.$$

$(Hessf)\binom{0}{k\pi} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat den doppelten Eigenwert 2, ist also positiv definit, daher sind die kritischen Punkte $(0, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ isolierte lokale Minima.

$(Hessf)\binom{0}{k\pi+\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte -2 und 2, ist also indefinit, daher sind die kritischen Punkte $(0, k\pi+\pi/2)$, $k \in \mathbb{Z}$ Sattelpunkte.

Zu b)

Die stationären Lösungen der DGL sind die Nullstellen von $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \binom{x}{y} \to \binom{\sin(y)\cos(y)}{-x}$, also wieder $(0, k\pi)$ und $(0, k\pi+\pi/2)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Die Jacobimatrix ist $(Jg)\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 0 & (\cos y)^2 - (\sin y)^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$(Jg)\binom{0}{k\pi+\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, hat also das charakteristische Polynom $x^2-1 = (x+1)(x-1)$, hat also einen Eigenwert mit RE(1) = 1 > 0; somit sind die stationären Lösungen$(0, k\pi+\pi/2)$, $k \in \mathbb{Z}$ instabil.

$(Jg)\binom{0}{k\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, hat also das charakteristische Polynom $x^2+1 = (x+i)(x-i)$, hat also Eigenwerte $\pm i$ mit $RE(\pm i) = 0$ und durch Linearisierung erhält man für die stationären Lösungen $(0, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ keine Stabilitätsaussage.

Wegen $\langle (gradf)\binom{x}{y}, g\binom{x}{y} \rangle = \langle \binom{2x}{2\sin(y)\cos(y)}, \binom{\sin(y)\cos(y)}{-x} \rangle = 0$, ist f eine Erhaltungsgröße für $\binom{x'}{y'} = g(x,y)$. Da nach (a) jedes $(0, k\pi)$ ein isoliertes lokales Minimum der Erhaltungsgröße f ist mit $f(0, k\pi) = 0$, gibt es eine Umgebung U_k von $(0, k\pi)$ mit $f(x,y) > f(0, k\pi)$ für alle $(x,y) \in U_k \setminus \{(0,k\pi)\}$. Die Lösungen $(0, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ sind somit stabil.