H20T1A4

Gegeben sei die reelle 2 × 2−Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem der Differentialgleichung x' = Ax.
b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems x' = Ax, x(0) = (-5, 6)

Zu a)

$\det(A - xE_2) = det \begin{pmatrix} 1-x & -1 \\ 4 & -3-x \end{pmatrix} = (1-x)(-3-x) + 4 = (x+1)^2$, also hat A den doppelten Eigenwert -1

$A + E_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also ist Rang(A+$E_2$) = 1, dim(Kern(A+$E_3$)) = 1 und $\binom{1}{2} \in Kern(A + E_2)$, also $Kern(A - E\_2) = lin\{\binom{1}{2}\}$. Da -1 die algebraische Vielfachheit 2 hat, ist Eig(A, -1, 2) = Kern((A-E_2)^2) = $\mathbb{R}^2$. $\binom{1}{0} \in \mathbb{R}^2 \backslash Eig(A, -1)$ und $(A + E_2)\binom{1}{0} = \binom{2}{4} \in Eig(A, -1)$.

$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ transformiert auf Jordanform; $T^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ und

$T^{-1}AT = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =: J$ hat Jordanform.

$e^{tJ} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1} == -\frac{e^{-t}}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \cdots =$
$e^{-t}\begin{pmatrix} 1+2t & -t \\ 4t & 1-2t \end{pmatrix}$ ist Fundamentalmatrix zu x' = Ax.

Zu b)

Das Anfangswertproblem hat die maximale Lösung $\lambda: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; t \to e^{tA}\binom{-5}{6} = \cdots = e^{-t}\binom{-5-16t}{6-32t}$.