H20T1A3

a) Begründen Sie, dass das Integral $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-2\cos(\theta)+\sin(\theta)}\, d\theta$ existiert.

b) Bestimmen Sie den Wert dieses Integrals.

Zu a)

Das Integral existiert, denn $|-2\cos(\theta)+\sin(\theta)| < 3\ für\ alle\ \theta \in \mathbb{R}$. ($|-2\cos(\theta)+\sin(\theta)| = 3$ kann ausgeschlossen werden, da $\cos(\theta) = -1\ und\ \sin(\theta) = 1$ bzw. $\cos(\theta) = 1\ und\ \sin(\theta) = -1$ nie gleichzeitig auftreten kann. Damit ist $3 - 2\cos(\theta) + \sin(\theta) > 0\ für\ alle\ \theta \in [0, 2\pi]$, somit ist $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}; \theta \to \frac{1}{3-2\cos(\theta)+\sin(\theta)}$ als Quotient stetiger Funktionen mit nullstellenfreiem Nenner wieder stetig, also auf dem kompakten Intervall [0, 2π] integrierbar.

Zu b)

Einsetzen von $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right), \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$ und $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{C}; t \to e^{it}$ $mit\ \gamma'(t) = i\gamma(t)$ liefert ∫_0^2π▒〖1/(3-2 cos(θ)+sin(θ)) dθ〗 =∫_0^2π▒〖1/(3-e^iθ-e^(-iθ)+1/2i (e^iθ-e^(-iθ))) dθ〗 =∫_0^2π▒〖1/(3-γ(t)-1/γ(t) +1/2i (γ(t)-1/γ(t))) (γ^' (t))/iγ(t) dt〗 =∫_γ^▒〖1/(3-z-1/γz+1/2i (z-1/z))iz dz〗 =∫_γ^▒〖2/(z^2 (1-2i)+6iz-(1+2i)) dz〗 .

$z^2(1-2i) + 6iz - (1+2i) = 0$ hat die Lösungen $\frac{-6i \pm \sqrt{(6i)^2 + 4(1-2i)(1+2i)}}{2(1-2i)} = \frac{-6i \pm \sqrt{-36+20}}{2(1-2i)} = \frac{-6i \pm 4i}{2(1-2i)} \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1}{5}\left(-3i + 6 \pm (2i - 4)\right)$, also $z_1 = \frac{1}{5}(-5i + 10) = 2 - i; z_2 = \frac{1}{5}(-i + 2) = \frac{2-i}{5}$.
$z^2(1-2i) + 6iz - (1+2i) = \left(z - (2-i)\right)\left(z - \frac{2-i}{5}\right)(1-2i)$. Beide Nullstellen sind einfach, damit ist $f: \mathbb{C} \backslash \left\{2 - i; \frac{2-i}{5}\right\} \to \mathbb{C}\, ; z \to \frac{2}{z^2(1-2i)+6iz-(1+2i)} = \frac{2}{(z-(2-i))\left(z-\frac{2-i}{5}\right)(1-2i)}$ holomorph und $\lim_{z \to 2-i} |f(z)| = \infty = \lim_{z \to \frac{2-i}{5}} |f(z)|$, $\lim_{z \to 2-i} \left(z - (2-i)\right) f(z) = \lim_{z \to 2-i} \frac{2}{\left(z - \frac{2-i}{5}\right)(1-2i)} = \cdots = \frac{i}{2}$, $\lim_{z \to \frac{2-i}{5}} \left(z - \frac{2-i}{5}\right) f(z) = \lim_{z \to \frac{2-i}{5}} \frac{2}{(z-(2-i))(1-2i)} = \cdots = -\frac{i}{2}$. Deshalb sind beide Singularitäten Pole erster Ordnung und $Res(f, 2-i) = \frac{i}{2}$, $Res\left(f, \frac{2-i}{5}\right) = -\frac{i}{2}$.

Da $spur(\gamma) \cap \left\{2 - i; \frac{2-i}{5}\right\} = \emptyset$ und $n(\gamma, 2-i) = 0, n\left(\gamma, \frac{2-i}{5}\right) = 1$, gilt nach dem Residuensatz $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-2\cos(\theta)+\sin(\theta)}\, d\theta = \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res\left(f, \frac{2-i}{5}\right) = \pi$.