H20T1A2

Gegeben sei die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, d.h. $f_0 = 1 = f_1 \; und \; f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für n ≥ 2, sowie die Potenzreihe $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ und R ∈ [0, ∞] sei der Konvergenzradius von F.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums, das R ≥ ½ ist.
b) Zeigen Sie, dass (1 – z – z²)F(z) = 1 für alle z ∈ ℂ mit |z| < R gilt.
c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R von F.

Zu a)

Da $f_n \geq 1 \; für \; alle \; n \in \mathbb{N}_0$, ist der Quotient $\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n}$ wohldefiniert und wegen $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \geq f_{n-1}$ ist $\frac{f_{n-1}}{f_n} \leq 1$ und somit $\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| \leq 2$.

Damit ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}} \geq \frac{1}{2}$

Zu b)

Für |z| < R konvergiert $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ absolut, damit ist $(1 - z - z^2)F(z) = (1 - z - z^2)\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = f_0 + z(f_1 - f_0) + z^2(f_2 - f_1 - f_0) + \sum_{n=3}^{\infty}(f_n - f_{n-1} - f_{n-2})z^n = 1$, (denn $f_0 = 1 = f_1 \; und \; f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, also $f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0 \; für \; n \geq 2$) ebenfalls konvergent, also (1 – z – z²)F(z) = 1 für alle z ∈ ℂ mit |z| < R.

Zu c)

1 – z – z² hat die Nullstellen $z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)}}{-2} = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Insbesondere gilt $\left|-\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right| \geq R$, da (1 – z – z²)F(z) = 1 für alle z ∈ ℂ mit |z| < R im Widerspruch zu (1 – z – z²) = 0 in $z_{1,2} = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Die Funktion $g: \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\} \to \mathbb{C}\,; z \to \frac{1}{1 - z - z^2}$ ist holomorph als Quotient holomorpher Funktionen mit nullstellenfreiem Nenner. Da $g|_{M = \left\{z \in \mathbb{C}: |z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}}$ holomorph ist, hat $g|_M$ eine Potenzreihenentwicklung um 0, die auf M konvergiert.

Auf $\{z \in \mathbb{C}: |z| < R\} \subseteq M$ gilt (1 – z – z²)F(z) = (1 – z – z²)g(z) = 1, also $F(z) = g(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$.

Da die Potenzreihenentwicklung von g um 0 auf M konvergiert und F = g auf $\{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$ gilt, konvergiert die Potenzreihe zu F auch auf M, d.h. $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.