H20T1A1

Beweisen Sie ausgehend von der Definition der Konvergenz einer reellen Folge:

a) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.
b) Die Summe zweier konvergenten reellen Folgen ist konvergent und der Grenzwert der Summe ist die Summe der Grenzwerte.

Zu a)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.

$a = \lim_{n\to\infty} a_n$ d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n-a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$.

Sind $a,b \in \mathbb{R}$ Grenzwerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein N_ε, $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ und $|a_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq M_\varepsilon$. Nach Dreiecksungleichung gilt für alle $n \geq \max\{N_\varepsilon, M_\varepsilon\}$: $|a-b| \leq |a-a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon$. Da dies für alle $\varepsilon>0$ erfüllt ist, gilt $|a-b| \in \bigcap_{\varepsilon>0}[0,2\varepsilon[= \{0\}$, also $a = b$.

Zu b)

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$, dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein N_ε, $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq M_\varepsilon$.

Es gilt $|(a+b)-(a_n+b_n)| = |a - a_n + b - b_n| \leq |a-a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für alle $n \geq \max\{N_\varepsilon, M_\varepsilon\}$, daher ist $a + b = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$.