H19T3A3

a) Formuliere den Satz von Liouville über ganze Funktionen

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeige: Ist der Imaginärteil $\Im m(f) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, so ist f konstant.

Zu a):

Satz von Liouville: Jede ganze (d.h. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) beschränkte Funktion ist konstant.

Beweis: (Bild)

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)1(k+1)} d\xi$$

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{f(z + \Re e e^{it})}{(Re^{it})^2} Re^{it} i \right| dt \leq \frac{C}{R} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

$$C := \sup\{|f(w)| : w \in \mathbb{C}\} < \infty$$

$$\Rightarrow f'(z) = 0 \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ d.h. } f \text{ ist konstant.}$$

Zu b):

Betrachte $\exp \circ (if) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{if(z)}$ ganz.
Es gilt $|e^{if(z)}| = e^{\Re e(if(z))} = e^{-\Im m(f(z))} \leq e^{-M}$ da $\exp|_{\mathbb{R}}$ monoton steigend.
Da $\Im m(f(z))$ nach unten beschränkt ist, gibt es ein $M \in \mathbb{R}$ mit $M \leq (\Im m(f))(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $-M \geq -(\Im m(f))(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow g := \exp \circ (if)$ ist eine ganze, beschränkte Funktion, also laut Satz von Liouville konstant.

$$g(\mathbb{C}) = \{c\} = \{e^{if(z)} : z \in \mathbb{C}\}$$

Ist $e^{i\xi} = c = e^{if(z)}$ für $z \in \mathbb{C}$.
Aus den Abbildungseigenschaften von exp folgt $f(z) \in \{\xi + 2\pi i k : k \in \mathbb{Z}\}$, d.h. $f(\mathbb{C}) \subseteq \{\xi + 2\pi i k : k \in \mathbb{Z}\}$ und damit ist $f(\mathbb{C})$ nicht offen, somit ist f nach dem Satz der Gebietstreue konstant.