H19T3A1

a) Gib eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die in keinem Punkt stetig ist. Zeige dabei explizit die Unstetigkeit in jedem Punkt.

b) Gib eine Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ an, die integrierbar ist, aber nicht stetig. Begründe dabei diese Eigenschaften. (Man kann sich auf das Riemann- oder auf das Lebesgue-Integral beziehen.)

Zu a):

Betrachte die *Dirichlet-Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$.

Wir zeigen, dass f in keinem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig ist.

1. Fall: $a \in \mathbb{Q}$: Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existiert dann für beliebiges $\delta > 0$ ein $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ mit $|x - a| < \delta$, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist und es gilt $|f(x) - f(a)| = 1 > \varepsilon$. Also ist f in keinem Punkt $a \in \mathbb{Q}$ stetig.

2. Fall: $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$: Analog zu Fall 1, nach Vertauschen der Rollen von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Alternative:

Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Dann ist $a_n := \lfloor 10^n y \rfloor \cdot \frac{1}{10^n}$ eine Folge in $\mathbb{Q}$ und $b_n := a_n + \frac{\sqrt{2}}{10^n}$ ein Folge in $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Offensichtlich konvergieren beide Folgen gegen y, aber es gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{n \to \infty} f(b_n)$. Damit ist f unstetig in jedem Punkt $y \in \mathbb{R}$.

Zu b):

Betrachte die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1, & x \geq \frac{1}{2} \\ 0, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$.

Da f bei $x = \frac{1}{2}$ eine Sprungstelle besitzt, ist f auf $[0,1]$ nicht stetig, aber als Treppenfunktion Riemann-integrierbar.

Variante:
Die Dirichlet-Funktion aus a) ist zwar nicht Riemann-integrierbar, aber Lebesgue-integrierbar.