H19T2A5

a) Formuliere den Riemannschen Abbildungssatz.

b) Formuliere das Schwarzsche Lemma.

c) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $z_0 \in \Omega \neq \mathbb{C}$. Es seien $f : \Omega \to \Omega$ und $g : \Omega \to \Omega$ biholomorph mit $f(z_0) = g(z_0)$ und $f'(z_0) = g'(z_0)$. Zeige, dass $f = g$ gilt.

Zu a):

Der Riemannsche Abbildungssatz:
Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann existiert eine biholomorphe Abbildung $G \to \mathbb{E}$, wobei $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe bezeichnet.

Zu b):

Das Schwarzsche Lemma:
Es bezeichne $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$. Dann gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$ und $|f'(0)| \leq 1$.
Falls in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{E}$, $z_0 \neq 0$ zusätzlich $f(z_0) = |z_0|$ oder $|f'(0)| = 1$ gilt, so ist f eine Drehung, d.h. $f(z) = e^{i\lambda} \cdot z$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zu c):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Aut}(\mathbb{E}) &:= \{h : \mathbb{E} \to \mathbb{E} : \ h \text{ biholomorph}\} \\
&= \{g_{c,\lambda} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}, \ z \mapsto e^{i\lambda}\frac{z-c}{1-\bar{c}z} : \ \lambda \in \mathbb{R}, \ c \in \mathbb{E}\} \\
\mathrm{Aut}_0(\mathbb{E}) &:= \{h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E}) : \ h(0) = 0\} = \{g_{0,\lambda} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}, \ z \mapsto e^{i\lambda}z : \ \lambda \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

Ist $h : \Omega \to \mathbb{E}$ biholomorph (existiert nach dem Riemannschen Abbildungssatz)

$\Rightarrow \tilde{h} := g_{h(z_0),0} \circ h \quad \Omega \to \mathbb{E}$ biholomorph mit $\tilde{h}(z_0) = 0$.

$\Rightarrow \tilde{h} \circ g^{-1} \circ f \circ (\tilde{h})^{-1} : \ \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ biholomorph mit

$$(\tilde{h} \circ g^{-1} \circ f \circ (\tilde{h})^{-1})(0) = (\tilde{h} \circ g^{-1} \circ f)(z_0 \overset{f(z_0)=g(z_0)}{=} (\tilde{h} \circ g^{-1})(g(z_0) = \tilde{h}(z_0) = 0$$

$\Rightarrow$ Es gibt $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{h} \circ g^{-1} \circ f \circ (\tilde{h})^{-1} = e^{i\lambda} id_{\mathbb{E}}$

$\Rightarrow g^{-1} \circ f = e^{i\lambda}(\tilde{h})^{-1} \circ id_{\mathbb{E}} \circ \tilde{h} = e^{i\lambda} id_{\Omega} \Rightarrow f = e^{i\lambda} g \Rightarrow f'(z) = e^{i\lambda} g'(z)$ und

$$f'(z_0) = g'(z_0) \quad \Rightarrow e^{i\lambda} = 1$$

(Typischer Trick für solche Aufgaben!)