H19T2A3

Auf dem Gebiet

$$\Omega := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ x \in \mathbb{R},\ -\pi < y < 2\pi\}$$

betrachte die meromorphe Funktion $f(z) := \frac{1}{z\sinh(z)}$, wobei $\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ ist.

a) Bestimme alle Singularitäten von f und deren Typ.

b) Berechne die Residuen von f in allen Polstellen.

c) Besitzt die Funktion f eine Stammfunktion in Ω?

d) Bestimme $c \in \mathbb{C}$ so, dass die Funktion $z \mapsto f(z) + c\frac{1}{z-i\pi}$ auf Ω eine Stammfunktion besitzt.

Zu a):

Singularitäten von f sind Nullstellen von $z\sinh(z)$

$$z\sinh(z) = z\frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \underbrace{\frac{z}{2}}_{=0\Leftrightarrow z=0} \underbrace{e^z}_{\neq 0} \underbrace{(1-e^{-2z})}_{=0\Leftrightarrow z\in i\pi\mathbb{Z}}$$

$$1 - e^{-2z} = 1 - e^{-2(z-ik\pi)} = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-2(z-ik\pi))^l}{l!} = 2(z-ik\pi)\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-2(z-ik\pi))^l}{(l+1)!}$$

$\Rightarrow$ $(1-e^{-2z})$ hat für $z = ki\pi$ eine einfache Nullstelle.

$\Rightarrow$ $z\sinh(z)$ hat bei $z = 0$ eine doppelte und bei $z = i\pi$ eine einfache Nullstelle.

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0} |f(z)| = \lim_{z\to 0} |zf(z)| = \infty; \quad \lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sinh(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{2z}{e^z - e^{-z}} \overset{(*)}{=}$$

$$\left[\ e^z - e^{-z} = e^z(1-e^{-2z}) = -e^z \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-2z)^l}{l!} = 2ze^z \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-2z)^{l-1}}{l!}\ \right]$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{z\to 0} \frac{1}{\underbrace{e^z}_{\to 1} \underbrace{\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-2z)^{l-1}}{l!}}_{\to 1}} = 1$$

Damit ist $z = 0$ ein Pol 2. Ordnung.

$$\lim_{z\to i\pi} |f(z)| = \infty; \quad \lim_{z\to i\pi} (z-i\pi)f(z) = \lim_{z\to i\pi} \frac{z-i\pi}{z(z-i\pi)e^z \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-2(z-ik\pi))^l}{(l+1)!}} = \frac{1}{i\pi e^{-i\pi}} = \frac{i}{\pi}$$

Damit ist $z = i\pi$ ein Pol 1. Ordnung mit $\mathrm{Res}(f, i\pi) = \frac{i}{\pi}$

Alternative zu a):

Singularitäten sind gerade die Nullstellen der Funktion $g(z) := \frac{1}{f(z)} = z\sinh z$ mit den Ableitungen $g'(z) = \sinh z + z\cosh z$ und $g''(z) = 2\cosh z + z\sinh z$. Die Nullstellen von g sind 0 und πik ($k \in \mathbb{Z}$), wobei nur $z_0 = 0$ und $z_1 = \pi i$ in S liegen. Wegen $g'(z_0) = 0$ und $g''(z_0) = 2$ ist z_0 zweifache Nullstelle von g und damit zweifache Polstelle von f. Weiter ist $g'(z_1) = -\pi i$, weswegen z_1 einfache Nullstelle von g und damit einfache Polstelle von f ist.

Zu b):

Für $\operatorname{Res}(f,0)$:

$$\left(\frac{1}{e^z \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-2z)^{l-1}}{l!}}\right)'\Bigg|_{z=0} = \operatorname{Res}(f,0) = \frac{-\left(e^z \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-2z)^{l-1}}{l!}\right)'}{\left(e^z \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-2z)^{l-1}}{l!}\right)^2}\Bigg|_{z=0}$$

$$= -\frac{e^z \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-2z)^{l-1}}{l!} + \sum_{l=2}^{\infty} (l-1)\frac{(-2z)^{l-2}}{l!}(-2)\right)}{\left(e^z \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-2z)^{l-1}}{l!}\right)^2}\Bigg|_{z=0} = \frac{1 + \frac{1}{2!}(-2)}{\cdots} = 0$$

Alternative zu b):

Für die einfache Polstelle z_1 erhält man

$$\operatorname{res}_{z_1} f = \frac{1}{g'(z_1)} = -\frac{1}{\pi i}$$

Für die zweifache Polstelle z_0 verwendet man die Formel für Polstellen n-ter Ordnung

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \left(\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} (z-a)^n f(z)\right)$$

und erhält

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z_0} f &= \lim_{z\to 0} \left(\frac{d}{dz}(z-0)^2 \frac{1}{z\sinh z}\right) = \lim_{z\to 0} \left(\frac{d}{dz}\frac{z}{\sinh z}\right) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{\sinh z - z\cosh z}{\sinh^2 z} \overset{(\star)}{=} \lim_{z\to 0} \frac{\cosh z - \cosh z - z\sinh z}{2\cosh z \sinh z} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{-z}{2\cosh z} = 0.
\end{aligned}$$

($\star$) Hier verwendet man die Regel von l'Hospital, die auch im Komplexen gilt. Dies kann mittels Laurent-Entwicklungen gezeigt werden.

Zu c):

$f : \Omega\backslash\{0, i\pi\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z\sinh(z)}$ hat keine Stammfunktion, denn z.B.

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto i\pi + e^{it}$ geschlossener Weg in $\Omega\backslash\{0, i\pi\}$, nullhomolog in $\Omega = (\Omega\backslash\{0, i\pi\}) \cup \{0, i\pi\}$, also gilt nach dem Residuensatz:

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = 2\pi i(\text{Res}(f, i\pi)n(\gamma, i\pi) + \text{Res}(f, 0)n(\gamma, 0)) = -2 \neq 0$$

Alternative zu c):

Nein, denn angenommen f besitzt eine Stammfunktion in S, so erhält man mithilfe des Residuensatzes

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\varepsilon(\pi i)} f(z)dz = \text{res}_{\pi i} f = -\frac{1}{\pi i} \neq 0$$

einen Widerspruch zum komplexen HDI. Also besitzt f in S keine Stammfunktion.

Zu d):

$$g : \Omega\backslash\{0, i\pi\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) + c\frac{1}{z - i\pi}$$

$\text{Res}(g, 0) = \text{Res}(f, 0) = 0$ da $z \mapsto c\frac{1}{z-i\pi}$ in Umgebung von 0 holomorph.

$\text{Res}(g, i\pi) = \text{Res}(f, i\pi) + c$

Ist $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Omega\backslash\{0, i\pi\}$ ein geschlossener Weg $\Rightarrow \gamma$ nullhomolog in Ω

$$\xRightarrow[\text{satz}]{\text{Residuen-}} \int\limits_\gamma g(z)dz = 2\pi i(\underbrace{\text{Res}(g, 0)}_{=0} n(\gamma, 0) + \text{Res}(g, i\pi)n(\gamma, i\pi)) =$$

$$= 2\pi i(\frac{i}{\pi} + c)n(\gamma, i\pi) \overset{!}{=} 0$$

Wähle also $c = \frac{-i}{\pi}$

(Lokal findet man für eine holomorphe Funktion immer eine Umgebung, sodass es eine Stammfunktion gibt. Aber diese lokalen Stammfunktionen kann man evtl. nicht zu einer globalen Stammfunktion für die gesamte Funktion zusammensetzen!)

Alternative zu d):

Sei $h(z) := f(z) + \frac{c}{z-\pi i}$ die gegebene Funktion. Es gilt

$$\mathrm{res}_{\pi i} h = \mathrm{res}_{\pi i}\left(f(z) + \frac{c}{z-\pi i}\right) = \mathrm{res}_{\pi i} f + \mathrm{res}_{\pi i}\frac{c}{z-\pi i} = -\frac{1}{\pi i} + c$$

und

$$\mathrm{res}_0 h = \mathrm{res}_0 f + \underbrace{\mathrm{res}_0 \frac{c}{z-\pi i}}_{\text{hol. in } 0} = 0.$$

Setzt man nun $c = \frac{1}{\pi i}$ so erhält man $\mathrm{res}_0 h = 0 = \mathrm{res}_{\pi i}$ und damit gilt mit dem Residuensatz für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in S

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)dz = \sum_{z\in S} n(z,\gamma)\mathrm{res}_z h = 0.$$

Mit dem komplexen HDI folgt nun die Existenz einer Stammfunktion von h in S.