H19T2A1

a) Bestimme die Menge der komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für welche die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z-1)^k}$$

konvergiert. Leite im Fall der Konvergenz einen möglichst einfachen Term für den Grenzwert her.

b) Bestimme die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = -x^2, \quad x(1) = -2$$

Gebe hierbei auch den Definitionsbereich dieser Lösung explizit an.

c) Bestimme alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y'(t) - 2y(t) = \cos(2t)$$

Zu a):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z-1)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-z)^k}$$

ist geometrische Reihe. Diese konvergiert wenn $\left|\frac{1}{1-z}\right| < 1$ konvergiert nicht, wenn $\left|\frac{1}{1-z}\right| \geq 1$, d.h. die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|1-z| > 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-z)^k} \underset{|\frac{1}{1-z}|<1}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{1-z}} = \frac{z-1}{z}$$

Zu b):

$$x' = -x^2, \quad x(1) = -2$$

Da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto -x^2 \in C^1(\mathbb{R})$ hat $x' = f(x)$, $x(1) = -2$ eine eindeutige maximale Lösung.

Trennen der Variablen:

$$\int_{-2}^{\lambda(t)} -\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}\Big|_{-2}^{\lambda(t)} = \frac{1}{\lambda(t)} + \frac{1}{2} = \int_{1}^{t} ds = t - 1$$

$$\frac{1}{\lambda(t)} = t - \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda(t) = \frac{1}{t - \frac{3}{2}}$$

$$\lambda'(t) = \frac{-1}{(t-\frac{3}{2})^2} = -(\lambda(t))^2, \quad \lambda(1) = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\Rightarrow \lambda :]-\infty, \frac{3}{2}[\to \mathbb{R},\, t \mapsto \frac{1}{t-\frac{3}{2}}$$

löst $x' = -x^2$, $x(1) = -2$

$$\lambda(t) = \frac{1}{t-\frac{3}{2}} \xrightarrow[t \nearrow \frac{3}{2}]{} -\infty$$

d.h. λ hat Randverhalten einer maximalen Lösung und ist damit die maximale Lösung zu $x' = f(x)$, $x(1) = -2$.

Zu c):

$$y'(t) - 2y(t) = \cos(2t)$$

ist eine inhomogene, lineare reellwertige Differentialgleichung erster Ordnung mit auf $\mathbb{R}$ stetigen Koeffizientenfunktionen, daher bildem die Lösungen einen eindimensionalen affinen Unterraum von $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (Die Lösungen existieren also auf der reellen Achse, der schönste Startwert ist also 0). Laut Lösungsformel ist

$$\lambda(t) = e^{2t} y_0 + \int_0^t e^{2t} e^{-2s} \cos(2s) ds$$

($y_0 \in \mathbb{R}$ Parameter für den 1-dimensionalen Lösungsraum von $y' = 2y$)

$$\int_0^t e^{-2s} \cos(2s) ds \overset{P.I.}{=} e^{-2s} \frac{1}{2} \sin(2s) \Big|_{s=0}^{s=t} - \int_0^t (-2e^{-2s}) \frac{1}{2} \sin(2s) ds$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2t} \sin(2t) + \int_0^t e^{-2s} \sin(2s) ds$$

$$\overset{P.I.}{=} \frac{1}{2} e^{-2t} \sin(2t) + e^{-2s}(-\frac{1}{2} \cos(2s)) \Big|_0^t - \int_0^t (-2e^{-2s})(-\frac{1}{2} \cos(2s)) ds$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^t e^{-2s} \cos(2s) ds = \frac{1}{2} e^{-2t} \sin(2t) - \frac{1}{2} e^{-2t} \cos(2t) + \frac{1}{2}$$

$$\lambda(t) = e^{2t} y_0 + \int_0^t e^{2t} e^{-2s} \cos(2s) ds = e^{2t} y_0 + e^{2t} \Big(\frac{1}{4} e^{-2t} \sin(2t) - \frac{1}{4} e^{-2t} \cos(2t) + \frac{1}{4} \Big)$$