H19T1A5

a) Gib zu beliebig vorgegebenen Anfangswerten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung des linearen Systems von Differentialgleichungen

$$x' = y$$

$$y' = x$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ explizit an und weise nach, dass diese Lösung die einzige ist. Zeige weiter, dass es für jede Lösung des Systems eine Konstante $C(x_0, y_0)$ gibt mit

$$x(t)^2 - y(t)^2 = C(x_0, y_0) \quad \text{für alle } t$$

Gib $C(x_0, y_0)$ explizit an.

b) Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt im offenen dritten Quadranten, d.h. es gelte $x_0 < 0$ und $y_0 < 0$. Zeige, dass das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{y^2+1}{2xy}, \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutig bestimmte maximale Lösung besitzt und bestimme diese explizit unter Angabe des Definitionsbereich.

Zu a):

Ist eine homogene lineare, autonome Differentialgleichung der Form

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese hat eine eindeutige auf $\mathbb{R}$ definierte maximale Lösung

$$\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \ , \quad t \mapsto e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(t)x_0 + \sinh(t)y_0 \\ \sinh(t)x_0 + \cosh(t)y_0 \end{pmatrix}$$

$$(*) A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l}}{(2l)!} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l+1}}{(2l+1)!} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cosh(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sinh(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$$

$$(\cosh(t)x_0 + \sinh(t)y_0)^2 - (\sinh(t)x_0 + \cosh(t)y_0)^2 =$$

$$= (\cosh(t))^2(x_0^2 - y_0^2) + (\sinh(t))^2(y_0^2 - x_0^2) =$$

$$= (x_0^2 - y_0^2)((\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2) = x_0^2 - y_0^2$$

Alternative:

Wir setzen für $t \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = x_0 \cosh(t) + y_0 \sinh(t) \tag{1}$$

$$y(t) = x_0 \sinh(t) + y_0 \cosh(t) \tag{2}$$

Wegen $\cosh' = \sinh$ und $\sinh' = \cosh$ gilt in der Tat $x' = y$ und $y' = x$, und wegen $\cosh(0) = 1$, $\sinh(0) = 0$ folgt in der Tat $x(0) = x_0$ und $y(0) = y_0$. Die Funktionen x und y lösen also das gegebene Anfangswertproblem.
Zur Eindeutigkeit der Lösung:[1] Gegeben sei eine weitere Lösung $\tilde{x}, \tilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des gleichen Anfangswertproblems; wir bilden

$$u := \tilde{x} + \tilde{y} \tag{3}$$

$$v := \tilde{x} - \tilde{y} \tag{4}$$

Dann folgt:

$$u' = \tilde{x}' + \tilde{y}' = \tilde{x} + \tilde{y} = u \tag{5}$$

$$v' = \tilde{x}' - \tilde{y}' = \tilde{y} - \tilde{x} = -v \tag{6}$$

Mit den Abkürzungen $a(t) := e^{-t}u(t)$ und $b(t) := e^t v(t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ erhalten wir:

$$a'(t) = -e^{-t}u(t) + e^{-t}u'(t) = 0$$

$$b'(t) = e^t v(t) + e^t v'(t) = 0$$

sodass nach dem Satz von Rolle a und b konstante Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit dem Wert $a(0) = \tilde{x}(0) + \tilde{y}(0) = x_0 + y_0$ bzw. $b(0) = \tilde{x}(0) - \tilde{y}(0) = x_0 - y_0$ sind. Wir schließen für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$u(t) = e^t a(t) = (x_0 + y_0)e^t \tag{7}$$

$$v(t) = e^{-t} b(t) = (x_0 - y_0)e^{-t} \tag{8}$$

und hieraus

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2}(u(t) + v(t)) \overset{Glgn. 7,8}{=} x_0 \cosh(t) + y_0 sinh(t)$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2}(u(t) - v(t)) \overset{Glgn. 7,8}{=} x_0 \sinh(t) + y_0 cosh(t)$$

wie zu beweisen war.
Schließlich gilt für $t \in \mathbb{R}$ nach der Kettenregel:

$$\frac{d}{dt}(x(t)^2 - y(t)^2) = 2x(t)x'(t) - 2y(t)y'(t) = 2x(t)y(t) - 2y(t)x(t) = 0$$

sodass nach dem Satz von Rolle die Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t)^2 - y(t)^2$ konstant mit dem Wert

$$C(x_0, y_0) := x(0)^2 - y(0)^2 = x_0^2 - y_0^2$$

ist.

[1] Man kann die Eindeutigkeit natürlich auch mit dem Satz von Picard-Lindelöf sehen. Für diesen Beweis wählen wir allerdings einen elementaren Zugang.

Zu b):

$(x_0, y_0) \in]-\infty, 0[^2$
Beh.: $y'(x) = \frac{y^2+1}{2xy}$, $y(x_0) = y_0$ hat eine eindeutige maximale Lösung, denn

$$f :]-\infty, 0[^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{y^2+1}{2xy} \quad \in C^1(]-\infty, 0[^2)$$

also ist der Existenz- und Eindeutigkeitssatz auf $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ anwendbar.

Trennen der Variablen:

$$\ln(y^2+1)\Big|_{y_0}^{\mu(x)} = \int_{y_0}^{\mu(x)} \frac{2y}{y^2+1} dy = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{s} = \ln(|s|)\Big|_{x_0}^{x} = \ln(\frac{x}{x_0})$$

$$\Rightarrow \ln((\mu(x))^2+1) = \ln(\frac{x}{x_0} + \ln(y_0^2+1) = \ln(\frac{x(y_0^2+1)}{x_0}), \quad \mu(x)^2 = \frac{x(y_0^2+1)}{x_0} - 1$$

$$\mu(x) = -\sqrt{\frac{x(y_0^2+1)}{x_0} - 1}, \quad \frac{x(y_0^2+1)}{x_0} - 1 \overset{!}{\geq} 0$$

$$\mu'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{x(y_0^2+1)}{x_0} - 1}} \cdot \frac{y_0^2+1}{x_0} = \frac{\mu(x)^2+1}{2x\mu(x)} = \frac{\frac{x(y_0^2+1}{x_0}}{-2x\sqrt{\frac{x(y_0^2+1)}{x_0} - 1}}$$

für $\frac{x(y_0^2+1)}{x_0} - 1 > 0$ d.h. $x \in]-\infty, \frac{x_0}{y_0^2+1}[$

$$x_0 \in]-\infty, \frac{x_0}{\underbrace{\underbrace{y_0^2}_{>0}+1}_{>1}}[, \quad \mu :]-\infty, \frac{x_0}{y_0^2+1}[\to]-\infty, 0[, \quad x \mapsto -\sqrt{\frac{x(y_0^2+1)}{x_0}} - 1$$

ist Lösung, $\mu(x) \xrightarrow{x \nearrow \frac{x_0}{y_0^2+1}} 0$

Alternative:

Die rechte Seite der DGL ist für $(x, y) \in U := (\mathbb{R} \setminus 0)^2$ definiert. Der offene dritte Quadrant $Q = (\mathbb{R}_-)^2$ ist die Zusammenhangskomponente von U, die (x_0, y_0) enthält, sodass der Graph jeder maximalen Lösung des gegebenen Anfangswertproblems in in Q liegt. Es sei $y : I \to \mathbb{R}_-$ mit einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}_-$ eine solche maximale Lösung. Dann folgt für $x \in I$ mit der Quotienten- und Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}\frac{y(x)^2 + 1}{x} = \frac{2y(x)y'(x)x - (y(x)^2 + 1)}{x^2} = 0$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen die gegebene DGL verwendet haben. Wir folgern, dass die Abbildung:

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{y(x)^2 + 1}{x}$$

konstant ist, und zwar mit dem Wert:

$$c := f(x_0) = \frac{y(x_0)^2 + 1}{x_0} = \frac{y_0^2 + 1}{x_0}$$

Das bedeutet für alle $x \in I$:

$$\frac{y(x)^2 + 1}{x} = c$$

also aufgelöst nach y(x) unter Verwendung von $y(x) < 0$:

$$y(x) = -\sqrt{cx - 1}$$

Die rechte Seite davon ist für $cx - 1 \geq 0$ definiert, also für

$$x \leq x_c := \frac{1}{c} = \frac{x_0}{y_0^2 + 1}$$

wobei wir $c < 0$ verwendet haben (gültig, wenn $x_0 < 0 < y_0^2 + 1$). Allerdings divergiert die Ableitung

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{y_0^2 + 1}{x_0}x - 1}$$

für $x \nearrow x_c$, sodass x_c selbst nicht mehr zum Definitionsbereich der maximalen Lösung $y : I \to \mathbb{R}_-$ gehören kann. Es folgt $I \subseteq]-\infty, x_c[$.
Umgekehrt erfüllt die Abbildung:

$$y :]-\infty, x_c[\to \mathbb{R}_-, \quad y(x) = -\sqrt{cx - 1}$$

in der Tat die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 < 0$ und die gegebene DGL wegen

$$y'(x) = -\frac{c}{2\sqrt{cx - 1}} = \frac{c}{2y(x)} = \frac{cx}{2xy} = \frac{y^2 + 1}{2xy}$$

Damit ist gezeigt, dass

$$y :]-\infty, x_c[\to \mathbb{R}_-, \quad y(x) = -\sqrt{cx - 1} \quad \text{mit} \quad c = \frac{y_0^2 + 1}{x_0}$$

die eindeutig bestimmte maximale Lösung des gegebenen AWP ist.