H19T1A2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto x^2 + xy^2 - xy$

a) Bestimme alle kritischen Punkte von f und untersuche, ob an diesen lokale Extrema vorliegen oder ob es sich um Sattelpunkte handelt.

b) Bestimme die Nullstellen von f und skizzieren Sie in $Q =]-1, 2[\, x \,]-1, 2[\supseteq \mathbb{R}^2$ die Menge $\{(x, y) \in Q : f(x, y) = 0\}$.

c) Sei $T \supseteq \mathbb{R}^2$ das abgeschlossene Dreieck im ersten Quadranten, das durch die Geraden $y = 0$, $x = 0$ und $x + y - 1 = 0$ berandet ist. Begründe, dass die Funktion f eingeschränkt auf T ihr Maximum und ihr Minimum annimmt und bestimme alle Punkte in T, an denen dieses Maximum bzw. Minimum angenommen werden zusammen mit den zugehörigen Funktionswerten.

d) Skizziere nur mit Hilfe der Ergebnisse aus a) bis c) qualitativ die Niveaulinien der Funktion f im Quadrat q, sodass man den Typ der kritischen Punkte klar aus der Skizze ablesen kann.

Zu a):

$$(\nabla f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + y^2 - y \\ x^2 + 2xy - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(2x + y - 1) \\ x(x + 2y - 1) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Fall 1:</u> $x = y = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Fall 2:</u> $y = 0,\ x + 2y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Fall 3:</u> $x = 0,\ 2x + y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Fall 4:</u> $2x + y - 1 = 0,\ x + 2y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ kritische Punkte: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$$(Hess\, f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 2y - 1 \\ 2x + 2y - 1 & 2x \end{pmatrix}$$

$(Hess\, f)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom

$$\mu^2 - 1 = (\mu + 1)(\mu - 1)$$

also Eigenwerte ± 1 mit verschiedenen Vorzeichen $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Sattelpunkt.

$(Hess\, f)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom

$$-\mu(2-\mu)-1 = \mu^2 - 2\mu - 1$$

also Eigenwerte $1 \pm \sqrt{2}$ mit verschiedenen Vorzeichen $\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ Sattelpunkt.

$(Hess\, f)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom

$$-\mu(2-\mu)-1 = \mu^2 - 2\mu - 1$$

also Eigenwerte $1 \pm \sqrt{2}$ mit verschiedenen Vorzeichen $\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ Sattelpunkt.

$(Hess\, f)\begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3 & 1/3\\1/3 & 2/3\end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom

$$(\frac{2}{3}-\mu)(\frac{2}{3}-\mu)-\frac{1}{9} = (\frac{2}{3}-\mu+\frac{1}{3})(\frac{2}{3}-\mu-\frac{1}{3}) = (1-\mu)(\frac{1}{3}-\mu)$$

also Eigenwerte $1, \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}$ isoliertes lokales Minimum.

Alternative zu a):

Ein Punkt (x_0, y_0) ist kritischer Punkt genau dann, wenn $\text{grad} f(x_0, y_0) = 0$ gilt. Es ist

$$\text{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix}2xy + y^2 - y\\x^2 + 2xy - x\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y(y+2x-1) = 0\\ x(x+2y-1) = 0\end{cases} .$$

<u>1. Fall:</u> Ist $y = 0$, so ist $x(x-1) = 0$, also entweder $x = 0$ oder $x = 1$.
<u>2. Fall:</u> Ist $y \neq 0$, so ist $y + 2x - 1 = 0$, also $y = 1 - 2x$. Mithilfe der zweiten Gleichung erhält man $x(x + 2 - 4x - 1) = 0$. Der erste Faktor ist 0 für $x = 0$ und damit $y = 1$. Der zweite Faktor ist 0, falls $3x - 1 = 0$ gilt, also $x = \frac{1}{3}$ und damit $y = \frac{1}{3}$.
Insgesamt erhält man also die kritischen Punkte $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (1,0)$, $p_3 = (0,1)$, $p_4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
Die Hessematrix ist gegeben durch $H_f(x,y) = \begin{pmatrix}2y & 2x+2y-1\\2x+2y-1 & 2x\end{pmatrix}$.
<u>$p_1 = (0,0)$:</u> Es ist $H_f(0,0) = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$ mit char. Polynom $\det(\lambda E_2 - H_f(0,0)) = \begin{vmatrix}\lambda & 1\\1 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$, also mit den Eigenwerten ± 1. Damit ist $H_f(0,0)$ indefinit und p_1 ein Sattelpunkt.
<u>$p_2 = (1,0)$:</u> Es ist $H_f(1,0) = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$ mit char. Polynom $\lambda^2 - 2\lambda - 1$. Die Nullstellen sind $\lambda_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Wegen $1 < \sqrt{2}$, ist die Hessematrix wieder indefinit

und p_2 ebenfalls ein Sattelpunkt.
$\underline{p_3 = (0,1)}$: Es ist $H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit char. Polynom $\lambda^2 - 2\lambda - 1$ (vgl. p_2). Wie zuvor ist also auch p_3 ein Sattelpunkt.
$\underline{p_4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$: Es ist $H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ mit char. Polynom $\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3}$. Für dessen Nullstellen gilt $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = \frac{1}{3}$. Damit ist $H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ positiv definit und p_4 lokales Minimum.

Zu b):

Setzt man $0 = x^2y + xy^2 - xy = xy(x+y-1)$, so folgt $x = 0$ oder $y = 0$ oder $y = -x+1$. Die gesuchte Nullstellenmenge $\mathcal{N}$ ergibt sich also aus der Vereinigung der gegebenen Geradengleichungen (gerade die das Dreieck T aus c) berandenden Geraden, grün in Skizze):

$$\mathcal{N} = \{(0,y)|y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,-x+1)|x \in \mathbb{R}\}.$$

Zu c):

Da T abgeschlossen und offensichtlich beschränkt ist, nimmt die stetige Funktion $f(x,y)$ ihr Maximum und Minimum auf T an. Im Inneren liegt von den in a) untersuchten Punkten nur $p_4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ mit $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$. Weitere Extrempunkte müssen also auf dem Rand von T liegen. Hier gilt aber nach Aufgabenteil b) $f(\partial T) = 0$. Somit wird das Minimum $-\frac{1}{27}$ in p_4 angenommen und das Maximum von f auf T beseitzt den Wert 0 und wird in jedem Randpunkt angenommen.

Zu d):

Die grünen Niveaulinien sind die Nulstellen von f. Die blauen Niveaulinien gehören zu positiven Werten, die roten zu negativen Werten von f. Somit ist deutlich, dass die Punkte p_1, p_2 und p_3 Sattelpunkte darstellen und p_4 ein lokales Minimum ist.