H18T3A4

Wir betrachten den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{i\pi/2} + e^{2i(t-\pi)} & \text{für } t \in [0, \pi] \\ -1 + i + 2e^{4it} & \text{für } t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

a) Skizziere den Weg γ (entweder in Worten oder mit Hilfe einer Skizze).

b) Berechne

$$\int_\gamma \frac{(z - (2 - i)) \cdot e^{iz}}{(z^2 + 1)(z^2 - 3 + 4i)} dz.$$

Hinweis: Berechne $(2 - i)^2$.

Zu a):

Es ist $e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$ und $e^{2i(t-\pi)} = e^{2it} \cdot e^{-2\pi i} = e^{2it}$.
Im Abschnitt $[0, \pi]$ beschreibt γ also einen Kreisrand um i mit Radius 1, der einmal in positiver Richtung durchlaufen wird.
Weiter ist $2e^{4it} = 2e^{4it-4\pi i} = 2e^{4i(t-\pi)} = 2 \cdot e^{2i(2\cdot(t-\pi))}$. Damit beschreibt γ im Abschnitt $[\pi, 2\pi]$ einen Kreisrand um $-1+i$ mit Radius 2, der zweimal in positiver Richtung durchlaufen wird. Das Innere von $\gamma|_{[0,\pi]}$ ist insbesondere im Inneren von $\gamma|_{[\pi,2\pi]}$ enthalten.

Zu b):

Wir folgen dem Hinweis und stellen fest: $(2 - i)^2 = 4 - 1 - 4i = 3 - 4i$.
Wir definieren also

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} \setminus \{\pm i, \pm(2 - i)\} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \frac{(z-(2-i))\cdot e^{iz}}{(z^2+1)(z^2-3+4i)} = \frac{(z-(2-i))\cdot e^{iz}}{(z+i)(z-i)(z+2-i)(z-(2-i))} \end{array}$$

f ist offensichtlich holomorph. Wir bestimmen zunächst die Umlaufzahlen von γ um die isolierten Singularitäten $\pm i, \pm(2 - i)$. Es ist:

$$|(-1 + i) - (2 - i)| = | - 3 + 2i| = \sqrt{9 + 4} > 2.$$
$$|(-1 + i) - (-i)| = | - 1 + 2i| = \sqrt{5} > 2.$$

Und damit sind $2-i$ und $-i$ nicht im Inneren von $\gamma|_{[\pi,2\pi]}$ und damit insbesondere nicht im Inneren von γ enthalten. Ihre Umlaufzahlen sind also 0. Wegen $|i-i| = 0$ ist i im Inneren von $\gamma|_{[0,\pi]}$ und damit auch im Inneren von $\gamma_{[\pi,2\pi]}$ enthalten; es folgt also $n(\gamma, i) = n(\gamma|_{[0,\pi]}, i) + n(\gamma|_{[\pi,2\pi]}, i) = 1 + 2 = 3$.
Andererseits ist $|(-1 + i) + (2 - i)| = 1 < 2$ und $|i + (2 - i)| = 2 > 1$ und damit $-(2 - i)$ im Inneren von $\gamma|_{[\pi,2\pi]}$, aber nicht im Inneren von $\gamma|_{[0,\pi]}$. Es folgt $n(\gamma, -2 + i) = n(\gamma|_{[0,\pi]}, -2 + i) + n(\gamma|_{[\pi,2\pi]}, -2 + i) = 0 + 2 = 2$.

Weil für $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i, \pm(2-i)\}$

$$\lim_{z \to -(2-i)} \left[(z + (2-i)) \cdot f(z)\right] = \lim_{z \to -(2-i)} \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)} = \frac{e^{-i(2-i)}}{(-2+2i)(-2)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$
$$\lim_{z \to i} \left[(z-i) \cdot f(z)\right] = \lim_{z \to i} \frac{e^{iz}}{(z+i)(z+(2-i))} = \frac{e^{-1}}{2i \cdot 2} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

gilt, sind $i, -2+i$ Pole erster Ordnung von f mit Residuen $\mathrm{Res}(f,i) = \frac{e^{-1}}{4i}$, $\mathrm{Res}(f, -2+i) = \frac{e^{-2i} \cdot e^{-1}}{4} \cdot \frac{1}{1-i} = \frac{e^{-2i} \cdot e^{-1}}{4} \cdot \frac{1+i}{2}$.
Aus dem Residuensatz ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{(z-(2-i)) \cdot e^{iz}}{(z^2+1)(z^2-3+4i)}\ \mathrm{d}z &= \int_\gamma f\ \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sum_{a \in \{\pm i, \pm(2-i)\}} n(\gamma, a) \cdot \mathrm{Res}(f, a) \\ &= 2\pi i \cdot \left(3 \cdot \frac{e^{-1}}{4i} + 2 \cdot \frac{e^{-1}}{4} e^{-2i} \cdot \frac{1+i}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2e} \cdot \left(3 + e^{-2i} \cdot (i-1)\right)\end{aligned}$$