H18T3A3

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$(y_1, y_2) \mapsto (y_1^2 - y_1(y_2+1) - 2, -2y_2)^T.$$

a) Bestimme die Gleichgewichtspunkte von $y' = f(y)$.

b) Seien $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ und $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\tilde{f}(y_1, y_2) := f(y_1 + c_1, y_2 + c_2)$. Zeige, dass y eine asymptotisch stabile Lösung von $y' = f(y)$ genau dann ist, wenn $\tilde{y} = y - c$ eine asymptotisch stabile Lösung von $\tilde{y}' = \tilde{f}(\tilde{y})$ ist.

c) Überprüfe, ob die Gleichgewichtspunkte aus a) asymptotisch stabile Lösungen sind.

Zu a):

Die Gleichgewichtspunkte sind gegeben durch die Nullstellen von f. Es gilt für $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \big(y_1^2 - y_1(y_2+1) - 2 = 0\big) \ \wedge -2y_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y_2 = 0 \ \wedge \big(y_1^2 - y_1 - 2 = (y_1+1)(y_1-2) = 0\big) \\ &\Leftrightarrow \quad y \in \{(-1,0); (2,0)\}\,. \end{aligned}$$

Also sind $(-1,0), (2,0)$ die Gleichgewichtspunkte von f.

Zu b):

Wir bemerken zunächst, dass für Funktionen $\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix} = \lambda : I \to \mathbb{R}^2$ und $\begin{array}{rccc} \tilde{\lambda} : & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \lambda(t) - c \end{array}$ gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}'(t) = \tilde{f}(\tilde{\lambda}(t)) \ \Leftrightarrow \ &\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) - c_1 \\ \lambda_2(t) - c_2 \end{pmatrix}' = f(\tilde{\lambda}(t) + c_1, \tilde{\lambda}(t) + c_2) = f(\lambda(t)) \\ \Leftrightarrow \ &\lambda'(t) = f(\lambda(t)) \end{aligned}$$

Genau dann ist λ also Lösung von $y' = f(y)$, wenn $\tilde{\lambda}$ Lösung von $\tilde{y}' = f(\tilde{y})$ ist. Wir stellen weiter fest, dass f offensichtlich stetig differenzierbar und damit insbesondere lokal Lipschitzstetig ist. Es gibt also zu jedem Anfangswertproblem

$$y' = f(y), \quad y(\tau) = \xi \tag{1}$$

mit $\tau \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige maximale Lösung $\mu_{(\tau,\xi)} : I_{(\tau,\xi)} \to \mathbb{R}^2$ mit einem offenen Intervall $I_{(\tau,\xi)}$, das τ enthält. Nach der obigen Bemerkung ist damit $\begin{array}{rccc} \tilde{\mu}_{(\tau,\xi-c)} : & I_{(\tau,\xi)} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \mu_{(\tau,\xi)}(t) - c \end{array}$ die eindeutige maximale Lösung zu

$$\tilde{y}' = \tilde{f}(\tilde{y}), \quad \tilde{y}(\tau) = \xi - c \tag{2}$$

Für $a < 0$ ist nun $y :]a, \infty[\to \mathbb{R}^2$ eine asymptotisch stabile Lösung der autonomen Differentialgleichung $y' = f(y)$, wenn es ...

1. ... für alle $\varepsilon > 0, \tau > a$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass
$$I_{(\tau,\xi)} \supseteq [\tau, \infty[\quad \text{und} \quad ||\mu_{(\tau,\xi)}(t) - y(t)|| < \varepsilon$$
für alle $\xi \in \mathbb{R}^2$ mit $||\xi - y(\tau)|| < \delta$, $t \geq \tau$ gilt und außerdem
2. ... ein $\eta > 0$ gibt, sodass
$$I_{(\tau,\xi)} \supseteq [\tau, \infty[\quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} ||\mu_{(\tau,\xi)}(t) - y(t)|| = 0$$
für alle $\xi \in \mathbb{R}^2$ mit $||\xi - y(\tau)|| < \eta$ ist.

Dann und nur dann, gibt es aber auch für jedes $\varepsilon > 0, \tau > 0$ ein $\delta > 0$

$$I_{(\tau,\xi)} \supseteq [\tau, \infty[\quad \text{und} \quad |\tilde{\mu}_{(\tau,\xi-c)} - \tilde{y}| = |(\mu_{(0,\xi)}(t) - c) - (y - c)| = |\mu_{(0,\xi)} - y| < \varepsilon$$

für alle $|\xi - c - \tilde{y}| = |\xi - y| < \delta$ und $t \geq \tau$, und ein $\eta > 0$, sodass

$$I_{(\tau,\xi)} \supseteq [\tau, \infty[\quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} ||\tilde{\mu}_{(\tau,\xi)}(t) - \tilde{y}(t)|| = \lim_{t\to\infty} ||\mu_{(\tau,\xi)}(t) - y(t)|| = 0$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^2$ mit $||\xi - y(\tau)|| < \eta$ ist. auch weil die Intervalle, auf denen $\mu_{(\tau,\xi)}$ und $\tilde{\mu}_{(\tau,\xi)}$ definiert sind, übereinstimmen. Damit folgt die Behauptung.

Zu c):

Mittels Linearisieren stellen wir (für die offensichtlich stetig differenzierbare) Funktion f fest:

$$(Jf)(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 - 1 & -y_1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$(Jf)(-1, 0) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad (Jf)(2, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Die Realteile der beiden Eigenwerte $-3, -2$ von $(Jf)(-1, 0)$ sind damit alle negativ und $(-1, 0)$ damit eine asymptotisch stabile Ruhelage.
Der Realteil des Eigenwerts 3 von $(Jf)(2, 0)$ ist damit positiv und $(2, 0)$ damit keine asymptotisch stabile Ruhelage.