H18T3A2

a) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \frac{3z+1}{z+1}$. Bestimme das Bild von $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ unter f.

b) Es seinen $B_2(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 2\}$ und $G = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, x < 0\}$. Bestimme eine biholomorphe Abbildung $g : B_2(1) \to G$.

c) Zeige oder widerlege, dass es eine biholomorphe Abbildung $h : \mathbb{C} \setminus \{x + iy \mid y = 0, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\} \to B_1(0)$ gibt.

Zu a):

Wir bemerken: Ist $z \in \partial B_1(0)$, $z \neq -1$, so gilt:

$$f(z) = \frac{3z+1}{z+1} \cdot \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}+1} = \frac{3|z|^2 + 3z + \overline{z} + 1}{|z|^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}(z) + 1} = \frac{2z + 2\mathrm{Re}(z) + 4}{2 + 2\mathrm{Re}(z)} = \frac{1+z}{1+\mathrm{Re}(z)} + 1$$

Da es sich bei f um eine Möbiustransformation handelt, wird der Einheitskreisrand auf eine Gerade oder einen Kreis abgebildet. Wegen $f(1) = 2, f(i) = 2 + i, f(-i) = 2 - i$ muss der Einheitskreisrand auf die Parallele zur imaginären Achse durch den Punkt 2 abgebildet werden. Da es sich bei Möbiustransformationen insbesondere um Homöomorphismen handelt, wird die einfach zusammenhängende Einheitskreisscheibe auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ abgebildet, das von $f(\partial B_1(0) \setminus \{-1\})$ begrenzt wird. Damit folgt aus $f(0) = 1$:

$$f(B_1(0)) = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 2\}$$

Zu b):

Wir bemerken zunächst, dass es sich bei G um die linke Halbebene handelt. Die linke Halbebene ergibt sich als Drehung der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$, also, indem alle Zahlen aus $\mathbb{H}$ mit i multipliziert werden. Bekanntlich ist die Cayley Transformation $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{H} & \to & B_1(0) \\ & z & \mapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{array}$ eine biholomorphe Abbildung $\mathbb{H} \to B_1(0)$. Aus dem Matrixkalkül ergibt sich die inverse Abbildung über

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{i - (-i)} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix},$$

zu $f^{-1}(z) = \frac{z+1}{iz-i} = (-i) \cdot \frac{z+1}{z-1}$. Mit obiger Überlegung ist dann

$$\begin{array}{cccc} g: & B_1(0) & \to & G \\ & z & \mapsto & i \cdot f^{-1}(z) = \frac{z+1}{z-1} \end{array}$$

eine biholomorphe Abbildung. Die gesuchte Abbildung ergibt sich dann durch Verschiebung und Streckung von $B_2(1)$ auf $B_1(0)$ via $z \mapsto \frac{1}{2}(z-1)$. Eine biholomorphe Abbildung $B_2(1) \to G$ ist damit gegeben durch:

$$h: \begin{array}{ccc} B_2(1) & \to & G \\ z & \mapsto & g\left(\frac{z-1}{2}\right) = \frac{z+1}{z-3} \end{array}.$$

Zu c):

Wir bemerken als erstes, dass das kuriose Gebiet

$$G := \mathbb{C} \setminus \{x + iy \mid y = 0, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\}$$

nichts anderes als $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup \{-1, 1\}$ ist. Dieses Gebiet ist nicht einfach zusammenhängend, denn sonst wäre der Weg $\gamma: \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \to & G \\ t & \mapsto & e^{it} \end{array}$ nullhomotop in G und es würde z.B. mit dem Cauchy-Integralsatz gelten:

$$0 = \int_\gamma \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it} \, \mathrm{d}t = 2\pi i.$$

Widerspruch! G ist also nicht einfach zusammenhängend. Insofern wäre h eine biholomorphe und insbesondere eine homöomorphe Abbildung eines nicht-einfach-zusammenhängenden Gebietes auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet, was nicht möglich ist. Eine solche Funktion h gibt es also nicht.