H18T3A1

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und

$$\exp(f(z)) = c$$

für ein $c \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige: f ist konstant.

b) Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $M \in \mathbb{R}$ mit $\Re e(g(z)) \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige: g ist konstant.

Hinweis: Betrachte $\exp(g(z))$ und verwende Teil a).

Zu a):

Nach dem kleinen Satz von Picard gilt für holomorphes f eine der 3 Aussagen:

1. $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$
2. $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\backslash\{a\}$ für ein $a \in \mathbb{C}$
3. $f(\mathbb{C}) = \{a\}$ für ein $a \in \mathbb{C}$, also f ist konstant.

Würde die erste Aussage gelten, dann gäbe es ein $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_1) = i\pi$ und ein $z_2 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_2) = 0$.

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \exp(f(z_1)) = \exp(i\pi) = -1 \\ \exp(f(z_2)) = \exp(0) = 1 \end{array}\right\} -1 \neq 1 \text{ also kein konstantes } c$$

$\Rightarrow$ der Fall $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ kann also nicht gelten.

Ähnlich ist das beim zweiten Fall.
Betrachte nur noch ein z_3, falls eines der anderen genau der ausgeschlossene Punkt a sein sollte. Sei $z_3 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_3) = i\frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow \quad \exp(f(z_3)) = \exp(i\frac{\pi}{2}) = i$$

$\Rightarrow$ somit hat man 3 paarweise verschiedene Punkte.
$\exp(f(z)) \neq c$ für c konstant.
$\Rightarrow$ der Fall $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\backslash\{a\}$ kann also auch nicht gelten.

Insofern bleibt nur noch der dritte Fall übrig: f ist konstant.

Zu b):

Da $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, ist g ganz. Betrachte

$$|e^{g(z)}| = |e^{\Re e(g(z)) + i\Im m(g(z))}| = |e^{\Re e(g(z))}| \cdot |e^{i\Im m(g(z))}| = e^{\Re e(g(z))} \leq e^M$$

Aus dem Satz von Liouville folgt dann, dass $e^{g(z)}$ konstant ist.
Aus Teil a) folgt, wenn $e^{g(z)}$ konstant ist, dann ist auch g konstant.