H18T2A5

Gegeben sei das autonome System

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x^3 - y \end{aligned}$$

Zeige, dass dieses System den Nullpunkt als einzige Ruhelage hat und dass die Nulllösung stabil ist.
Hinweis: Suche eine Ljapunow-Funktion der Form $V(x,y) = \alpha x^4 + \beta y^2$ mit Konstanten $\alpha, \beta > 0$.
Zur Erinnerung: Eine Ljapunow-Funktion für das Vektorfeld $f(x,y)$ auf $\mathbb{R}^2$ ist eine stetig differenzierbare Funktion $V(x,y)$, die längs jeder Integralkurve von f fällt; d.h. $\langle \mathrm{grad} V(x,y), f(x,y)\rangle \leq 0$.

Lösung

Wir definieren zunächst $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{pmatrix} y \\ -x^3 - y \end{pmatrix} \end{array}$.

Die obige Differentialgleichung wird daher zu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = f(x,y)$$

und die Ruhelagen sind gerade die Nullstellen von f. Wegen $f(0,0) = \underline{0}$ ist der Nullpunkt eine Ruhelage des Systems. Ist nun $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ eine Ruhelage des Systems, so folgt $y = 0$ und $0 = -x^3 - y = -x^3$, also $(x,y) = (0,0)$. Damit ist der Nullpunkt die einzige Ruhelage.
Zur Untersuchung der Stabilität der Nulllösung folgen wir dem Hinweis und machen den Ansatz $\begin{array}{cccc} V: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \alpha x^4 + \beta y^2 \end{array}$. Damit $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$ Ljapunow-Funktion ist, muss gelten:

$$0 \geq \langle \mathrm{grad} V(x,y), f(x,y)\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 4\alpha x^3 \\ 2\beta y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ -x^3 - y \end{pmatrix} \right\rangle = (4\alpha - 2\beta)x^3 y - 2\beta y^2$$

Mit der Wahl $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{4}$, folgt dann $\langle \mathrm{grad} V(x,y), f(x,y)\rangle = -y^2 \leq 0$. Um mithilfe der Ljapunow-Funktion zu zeigen, dass $\underline{0}$ stabile Ruhelage des obigen Systems ist, müssen wir prüfen:

1. f ist lokal Lipschitzstetig.
   Da $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, ist dies erfüllt.
2. $V(0,0) = 0$ - dies ist offensichtlich der Fall.
3. Es gibt eine Umgebung U von $(0,0)$, sodass $V(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in U$.
   Für $(x,y) \in K(0,1) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}, (x,y) \neq (0,0)$ gilt:
   $$V(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2 \geq \frac{1}{4} \cdot \left(x^4 + y^4\right) > 0 = V(0,0)$$
   Damit ist auch dieser Punkt erfüllt und die Nulllösung stabil.