H18T2A4

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld mit $\langle f(x), x \rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. (Dabei bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$.)
Zu zeigen:

a) Für jede auf einem offenen Intervall J definierte Lösung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ der Differentialgleichung $x' = f(x)$ ist die Euklidische Norm $|\varphi(t)|$ konstant.

b) Jede auf einem offenen Intervall J definierte Lösung φ kann zu einer Lösung $\tilde{\varphi} :\to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ [sic!] fortgesetzt werden.

Zu a):

Sei also $\varphi : J \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine Lösung von $x' = f(x)$. Dann gilt:

$$\left(|\varphi(t)|^2\right)' = (\langle \varphi(t), \varphi(t) \rangle)' = 2 \cdot \langle \varphi'(t), \varphi(t) \rangle = 2 \cdot \langle f(\varphi(t)), \varphi(t) \rangle = 0.$$

Damit ist $|\varphi(t)|^2$ und damit auch $|\varphi(t)|$ konstant.

Zu b):

Vermutlich soll gezeigt werden, dass eine solche Lösung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann.
Wir bemerken hierzu, dass es zu jedem Anfangswertproblem $x' = f(x),\ x(0) = \xi$ mit $\xi \in \mathbb{R}^n$ aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von f eine eindeutige, maximale Lösung $\mu : I \to \mathbb{R}^n$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ gibt. Schreiben wir $I =]a, b[$ mit $a < 0 < b$, so gilt aufgrund der Maximalität der Lösung (- weil $\partial(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) = \emptyset$) einer der folgenden beiden Fälle:

1. $b = \infty$ oder
2. $b \neq \infty$, $\lim_{t \nearrow b} ||\mu(t)|| = \infty$.

Weil $|\mu(t)|$ nach Teil a) aber konstant ist, scheidet der zweite Fall aus und es folgt $b = \infty$, analog $a = -\infty$ und insgesamt $I = \mathbb{R}$. Damit ist φ aufgrund der Eindeutigkeitsaussage des globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes eine Einschränkung der maximalen Lösung $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Mit anderen Worten lässt sich φ auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.