H18T2A3

a) Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ erfüllt $a > 1$. Zeige, dass die Gleichung

$$ze^{a-z} = 1$$

genau eine Lösung $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ besitzt und dass diese Lösung reell und positiv ist.
Hinweis: Wende den Satz von Rouché auf die Funktion $f(z) := ze^{a-z} - 1$ an und wählen als Vergleichsfunktion $g(z) := ze^{a-z}$.

b) Zeige, dass gilt:

$$\int_0^\pi \frac{1}{3 + 2\cos(\vartheta)} d\vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

Zu a):

Wir folgen dem Hinweis und stellen fest, dass für $z \in \partial\mathbb{E}$ - wobei $\mathbb{E}$ die offene Einheitskreisscheibe bezeichne - gilt:

$$|g(z)| = \left|ze^{a-z}\right| = |z| \left|e^{a-z}\right| = e^{\mathrm{Re}(a-z)} = e^{a-\mathrm{Re}(z)} \geq e^{a-1} > e^0 = 1 = |-1|$$

Nach dem Satz von Rouché haben damit g und $g - 1 = f$ gleich viele Nullstellen in $\mathbb{E}$. Weil g genau eine einfache Nullstelle bei 0 hat, gibt es also auch genau ein $z \in \mathbb{E}$ mit

$$0 = f(z) = g(z) - 1 = e^{a-z} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{a-z} = 1.$$

Wegen $f(0) = -1$ und $f(1) = e^{a-z} - 1 > 0$ muss f aufgrund des Zwischenwertsatzes - angewendet auf die Einschränkung $f|_\mathbb{R}$ - eine Nullstelle in $]0, 1[$ aufweisen. Damit ist die einzige Nullstelle von f bzw. Lösung der Gleichung $ze^{a-z} = 1$ in $\mathbb{E}$ im Intervall $]0, 1[$, also positiv und reell.

Zu b):

Mit der Substitution $\varphi = 2\pi - \vartheta$ und mit $\cos(2\pi - x) = \cos(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\cos(\vartheta)}\ \mathrm{d}\vartheta &= \int_0^\pi \frac{1}{3 + 2\cos(\vartheta)}\ \mathrm{d}\vartheta + \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\cos(\vartheta)}\ \mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{3 + 2\cos(\vartheta)}\ \mathrm{d}\vartheta + \int_\pi^0 \frac{1}{3 + 2\cos(2\pi - \varphi)}(-\ \mathrm{d}\varphi) \\
&= 2 \cdot \int_0^\pi \frac{1}{3 + 2\cos(\vartheta)}\ \mathrm{d}\vartheta
\end{aligned}$$

Wir definieren zunächst den Weg $\begin{array}{cccc} \gamma: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & e^{i\vartheta} \end{array}$ und stellen hiermit fest:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{1}{3+2\cos(\vartheta)} \, \mathrm{d}\vartheta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3+e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}} \, \mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\vartheta}}{3e^{i\vartheta}+e^{i\vartheta\cdot 2}+1} \, \mathrm{d}\vartheta \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \int_\gamma \frac{1}{z^2+3z+1} \, \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Nenners sind gegeben durch $a_\pm = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, wobei

$$\begin{aligned} \left|\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right| &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} > \frac{3+\sqrt{4}}{2} = \frac{5}{2} > 1 \\ \left|\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right| &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{3-\sqrt{4}}{2} = \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

gilt. Die Umlaufzahl des einmal durchlaufenen, positiv orientierten Kreiswegs γ um den Ursprung mit Radius 1 ist im Inneren (also in der Eiinheitskreisscheibe) offensichtlich 1 und außerhalb Null. Daher sind die Umlaufzahl $n(\gamma, a_+) = 1$ und $n(\gamma, a_-) = 0$. Schreiben wir also $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{C}\setminus\{a_\pm\} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \frac{1}{z^2+3z+1} = \frac{1}{(z-a_+)(z-a_-)} \end{array}$, so ist a_+ wegen

$$\lim_{z\to a_+} (z-a_+)\cdot f(z) = \frac{1}{a_+ - a_-} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

ein Pol erster Ordnung mit Residuum $\mathrm{Res}(f, a_+) = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Damit ist nach dem Residuensatz (weil f holomorph und γ nullhomolog in $\mathbb{C}$ ist):

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{1}{3+2\cos(\vartheta)} \, \mathrm{d}\vartheta &= \frac{1}{2i} \int_\gamma f \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \cdot [n(\gamma, a_+)\cdot \mathrm{Res}(f, a_+) + n(\gamma, a_-)\cdot \mathrm{Res}(f, a_-)] \\ &= \pi \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$