H18T2A2

a) (i) Zeige, dass die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8} \tag{1}$$

absolut konvergiert für jedes $z \in \mathbb{R}$ und die Funktion $f : z \mapsto f(z)$, die so entsteht, stetig ist auf $\mathbb{R}$.

(ii) Gebe (ohne Beweis) die größte offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ an, so dass die Funktion f durch (**??**) auf U definiert und dort holomorph ist.

b) Die komplexen Zahlen $a_1, ..., a_n$ (mit $n \geq 1$) erfüllen $|a_j| = 1$ für $j = 1, ..., n$. Zeige, dass es einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gibt, so dass das Produkt der Abstände zwischen z und a_j, für $j = 1, ..., n$ mindestens 1 ist.

Hinweis: Betrachte die Funktion $f(z) := (z - a_1) \cdot ... \cdot (z - a_n)$.

Zu a), (i):

Ist $z = 0$, so ist offensichtlich $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^2}{n^2 \cdot 0^2 + 8} = 0$ (insbesondere konvergiert die vorkommende Reihe absolut).
Andernfalls ist $z \neq 0$ und wir stellen fest:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \frac{8}{z^2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

wobei wir verwendet haben, dass die Reihe der Form $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ genau dann konvergiert, wenn $\alpha > 1$ gilt. Damit konvergiert auch in diesem Fall die Reihe in Gleichung (**??**) absolut.

Dass die Funktion f stetig ist, besagen nun entweder Sätze aus der Vorlesung oder die folgende Argumentation: Betrachte die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=1}^{n} f_k)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei $f_n(z) := \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8}$. Diese konvergiert gleichmäßig gegen f, denn für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es wegen der Konvergenz der Folge $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2})_{n \in \mathbb{N}}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$ und daher ist für $n > N, n \in \mathbb{N}$

$$|f(z) - f_n(z)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \varepsilon.$$

Aus der (offensichtlichen) Stetigkeit der f_n (für alle $n \in \mathbb{N}$) folgt damit aus der eben gezeigten gleichmäßigen Konvergenz auch die Stetigkeit des punktweise gebildeten Grenzwerts f.

Zu a), (ii):

Im Körper der komplexen Zahl können die Funktion

$$f_n(z) = \frac{z^2}{n^2 \cdot (z - i\frac{2\sqrt{2}}{n}) \cdot (z + i\frac{2\sqrt{2}}{n})}$$

nur noch auf der Menge $\mathbb{C} \setminus \left\{ \pm i\frac{2\sqrt{2}}{n} \right\}$ definiert werden. Damit liegt in jeder Umgebung von 0 ein Punkt, an dem f nicht definiert ist. Für $z \notin A := \{0\} \cup \left\{ \pm i\frac{2\sqrt{2}}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ und $C := \operatorname{Re}\left(\frac{8}{z^2}\right)$ gilt die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^2 + \frac{8}{z^2}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left|\operatorname{Re}\left(n^2 + \frac{8}{z^2}\right)\right|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + C} < \infty,$$

Damit konvergiert die Reihe (**??**) für alle $z \in U := \mathbb{C} \setminus A$. Da die f_n gleichmäßig gegen f konvergieren, folgt aus der Holomorphie der f_n auch die Holomorphie von f auf U.

Zu b):

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, wie sie im Hinweis definiert wurde und wollen zeigen, dass es $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$ mit $|f(z)| \geq 1$ gibt.

Wir bemerken als erstes $|f(0)| = \prod_{i=1}^{n} |a_j| = 1$. Andererseits ist $f|_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ auf der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ holomorph und als Einschränkung einer ganz-holomorphen Funktion auch stetig auf $\partial\mathbb{E}$ fortsetzbar. Nach dem Maximumsprinzip für beschränkte Gebiete gilt

$$1 = |f(0)| \leq \max_{z \in \overline{\mathbb{E}}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\mathbb{E}} |f(z)|.$$

Es gibt also ein $z \in \partial\mathbb{E}$ (also eine $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$), für das $|f(z)| \geq 1$ gilt - wie gewünscht.

Hieraus folgt dann

$$1 = |f(z)| \leq \prod_{i=1}^{n} |z - a_j|$$

- wie gewünscht.