

H18T1A5

Gib jeweils entweder ein Beispiel an (ohne Begründung) oder begründe, warum es ein solches nicht geben kann.

- a) Eine holomorphe Funktion $h : \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\lim_{z \rightarrow 0} h(z) \cdot \sqrt{|z|} = 1$.
- b) Eine stetig differenzierbare Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit den Eigenschaften (i)-(iii):
- (i) $F(0) = 0$
 - (ii) Die Realteile der Eigenwerte der Ableitung $DF(0)$ sind kleiner oder gleich 0.
 - (iii) 0 ist keine stabile Ruhelage der Differentialgleichung $y' = F(y)$.
- c) Ein Polynom $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Differentialgleichung $y' = P(y)$ keine globale Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt.

Zu a):

So eine Funktion kann es nicht geben:

Angenommen, es gäbe eine solche Funktion, so wäre die nicht im Definitionsbereich liegende Stelle 0 entweder eine hebbare oder eine wesentliche Singularität oder eine Polstelle. Ist 0 eine hebbare Singularität von h , so existiert $\lim_{z \rightarrow 0} h(z) \in \mathbb{C}$, und es folgt

$$1 = \lim_{z \rightarrow 0} h(z) \cdot \sqrt{|z|} = \left(\lim_{z \rightarrow 0} h(z) \right) \cdot \left(\lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{|z|} \right) = 0$$

Widerspruch.

Ist 0 Pol von h , so existiert $\lim_{z \rightarrow 0} z^m \cdot h(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ für ein $m \in \mathbb{N}$, und es folgt für $z \neq 0$

$$\left| h(z) \cdot \sqrt{|z|} \right| = |z^m h(z)| \cdot \frac{\sqrt{|z|}}{|z|^m} = |z^m h(z)| \cdot \frac{1}{|z|^{m-1/2}}$$

Weil $z^m \cdot h(z)$ für hinreichend kleine $|z|$ von Null verschieden ist (sonst wäre $\lim_{z \rightarrow 0} z^m \cdot h(z) = 0$), ist der Ausdruck wegen der Unbeschränktheit von $\frac{1}{|z|^{m-1/2}}$ unbeschränkt; $1 = \lim_{z \rightarrow 0} h(z) \cdot \sqrt{|z|}$ ist damit nicht möglich. Widerspruch.

Ist 0 wesentliche Singularität von h , so gibt es z.B. wegen des Satzes von Casorati-Weierstraß eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert 0 und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) \in \mathbb{C}$ und es folgt

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n) \cdot \sqrt{|z_n|} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n) \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|z_n|} \right) = 0$$

Widerspruch. Damit ist die isolierte Singularität 0 weder hebbar, noch wesentlich, noch ein Pol. Die Funktion h kann damit nicht holomorph sein.

Zu b):

Die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist ein Beispiel für die genannte
Funktion, da der Eigenwert 0 von $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ algebraische Vielfachheit zwei,
aber geometrische Vielfachheit eins aufweist.

Zu c):

Es ist beispielsweise

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Daher ist $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht globale Lösung der Differentialgleichung

$$y' = P(y), \quad P(y) = 1 + y^2 \in \mathbb{R}[x].$$