H18T1A4

In dieser Aufgabe bezeichne $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene und $S := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ einen Streifen in $\mathbb{C}$.

a) Gib (mit Begründung) eine holomorphe, bijektive Abbildung $g : S \to H$ an.

b) Bestimme eine holomorphe bijektive Funktion $f : S \to S$ mit $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

Zu a):

Betrachte für den Streifen $S' = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$ die beiden Funktionen

$$\begin{array}{ccc} S & \to & S' \\ z & \mapsto & i\pi z \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} S' & \to & H \\ z & \mapsto & e^z \end{array}$$

Deren Komposition $\begin{array}{cccc} g: & S & \to & H \\ & z & \mapsto & e^{i\pi z} \end{array}$ ist dann eine holomorphe, bijektive Abbildung:

Wir zeigen zuerst $g(S) = H$.
Für $s = x + iy \in S$ ist $g(s) = e^{i\pi s} = e^{i\pi x} \cdot e^{-\pi y}$ und damit $\mathrm{Im}(g(s)) = \sin(\pi x) \cdot e^{-\pi y} > 0$, da nach Voraussetzung $x \in]0, 1[$; daher ist $g(S) \subseteq H$.
Ist andererseits $h \in H$ vorgegeben, so schreibe $h = re^{i\varphi}$ in Polarkoordinaten $(r, \varphi) \in [0, \infty[\times [0, 2\pi[$.
Als Element der oberen Halbebene weist h positiven Imaginärteil $\mathrm{Im}(h) = r \cdot \sin\varphi$ auf, also ist $\varphi \in]0, \pi[$. Damit ist $s := \frac{\varphi}{\pi} - \frac{i}{\pi}\ln(r)$ ein Element des Streifens S mit $g(s) = e^{i\pi s} = e^{\ln(r)+i\varphi} = h$, es folgt $g(S) = H$.
Zum Nachweis der Injektivität nehmen wir $g(s) = g(s')$ für $s = x + iy, s' = x' + iy' \in S$ an.
Dies ist äquivalent zu $1 = e^{i\pi(s-s')} = e^{i\pi(x-x')} \cdot e^{-\pi(y-y')}$ und damit $y = y'$ und $x = x' + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Da der Streifen S nur Realteile zwischen 0 und 1 zulässt, folgt schließlich $x = x'$ und hieraus $s = s'$. Insgesamt ist $g : S \to H$ also eine bijektive Abbildung, die als Verkettung holomorpher Funktionen holomorph ist - wie gewünscht.

Zu b):

Wir bemerken $g\left(\frac{1}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ und $g\left(\frac{1}{4}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ und definieren daher

$$\begin{array}{cccc} h: & H & \to & H \\ & z & \mapsto & \frac{1\cdot z+1}{0\cdot z+\sqrt{2}} = \frac{z+1}{\sqrt{2}} \end{array} .$$

Bei h handelt es sich um eine Möbiustransformation, die wegen $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} > 0$ und des Isomorphismus' $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ eine holomorphe Selbstabbildung der oberen Halbebene darstellt. [Wenn man das nicht weiß, kann man dies auch analog wie in a) nachrechnen.]

Definiere schlussendlich $\begin{array}{rccc} f: & S & \to & S \\ & z & \mapsto & (g^{-1} \circ h \circ g)(z) \end{array}$.

Als Verkettung holomorpher, bijektiver Abbildungen ist f auch holomorph; g^{-1} ist dabei als Umkehrfunktion einer holomorphen, bijektiven Funktion wieder holomorph - dies ist eine Konsequenz aus dem Umkehrsatz.

Zur Sicherheit geben wir f noch explizit an. Hierzu stellen wir zunächst fest, dass die Umkehrfunktion von g durch $g^{-1}(z) = \frac{1}{i\pi}\mathrm{Log}(z)$ gegeben ist, wobei Log den Hauptzweig des komplexen Logarithmus bezeichne. Es folgt:

$$f(z) = \frac{1}{i\pi}\mathrm{Log}\left(\frac{e^{i\pi z}+1}{\sqrt{2}}\right)$$

und $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{i\pi}\mathrm{Log}\left(\frac{e^{i\pi/2}+1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{i\pi}\mathrm{Log}\left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\mathrm{Log}\left(e^{i\pi/4}\right)}{i\pi} = \frac{\left(\ln(1)+i\frac{\pi}{4}\right)}{i\pi} = \frac{1}{4}$.