H18T1A3

In dieser Aufgabe sollen Existenz und Eiindeutigkeit globaler Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Anfangswertaufgaben

$$\dot{x}(t) = 2\sqrt{|x(t)|} \cdot \cos(t), \quad x(0) = c$$

für $c \in [0, \infty[$ diskutiert werden. Unter einer globalen Lösung verstehen wir in dieser Aufgabe stets eine Lösung, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

a) Bestimme für jedes $c > 1$ eine globale Lösung x_c des entsprechenden Anfangswertproblems. Warum ist diese deren einzige globale Lösung?

b) Gib für jedes $0 \leq c \leq 1$ jeweils zwei verschiedene globale Lösungen des Anfangswertproblems an (eine Begründung ist nicht verlangt).

Zu a):

Sei $c > 1$ beliebig, aber fest. Wir nehmen zunächst $x(t) > 0$ an - auf einem hinreichend kleinen Intervall um den Anfangszeitpunkt 0 ist das wegen $x(0) = c > 0$ auch korrekt. Eine lokal eindeutige Lösung ergibt sich dann über Separation der Variablen mit dem Ansatz:

$$\sqrt{\lambda(t)} - \sqrt{c} = \left[\sqrt{x}\right]_c^{\lambda(t)} = \int_c^{\lambda(t)} \frac{1}{2\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int_0^t \cos(t) \, \mathrm{d}t = \sin(t)$$

Dies motiviert die Definition von $\begin{array}{cccc} \lambda : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & (\sin(t) + \sqrt{c})^2 \end{array}$. Die so definierte Funktion λ nimmt offensichtlich ausschließlich positive Werte an und ist stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \lambda'(t) &= 2 \cdot (\sin(t) + \sqrt{c}) \cdot \cos(t) \overset{|\sin(t)| \leq 1 < c}{=} 2 \cdot |\sin(t) + \sqrt{c}| \cdot \cos(t) \\ &= 2 \cdot \sqrt{|\lambda(t)|} \cdot \cos(t) \end{aligned}$$

Damit ist die gefundene Funktion λ mit $\lambda(0) = c$ eine globale Lösung des obigen Anfangswertproblems.

Sei nun $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere globale Lösung des obigen Anfangswertproblems. Betrachte nun die Menge $M := \{t \in \mathbb{R} \mid \mu(t) = \lambda(t)\}$. Die Menge M ist als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter der stetigen Funktion $\lambda - \mu$ wieder abgeschlossen. Wegen $\mu(0) = c = \lambda(0)$ ist M auch nicht leer. Wir zeigen noch, dass M auch offen ist: Sei hierzu $\tau \in M$ vorgegeben; wir definieren damit $\xi := \mu(\tau) = \lambda(\tau) = (\sin(\tau) + \sqrt{c})^2 > 0$ und betrachten

$$\dot{x}(t) = 2\sqrt{|x(t)|} \cdot \cos(t), \quad x(\tau) = \xi.$$

Wie wir bereits im ersten Teil der Lösung bemerkt haben, gibt es wegen $2 \cdot \sqrt{|x(0)|} = 2\sqrt{\xi} > 0$ eine lokal eindeutige Lösung dieses Anfangswertproblems. Weil sowohl λ als auch μ das Anfangswertproblem lösen, gibt es eine offene Umgebung U von τ mit $\lambda|_U = \mu|_U$; also ist mit τ auch eine offene Umgebung U von

τ in M enthalten und M ist offen. Insgesamt folgt damit $M = \mathbb{R}$, äquivalent zu $\lambda \equiv \mu$.

Zu b):

Mit der Arcussinus Funktion $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ definiere

$$\begin{aligned} \lambda : \quad \mathbb{R} \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ t \quad &\mapsto \quad \begin{cases} (\sin(t) + \sqrt{c})^2 & t \in]\arcsin(-c), -\arcsin(-c) + \pi[\\ 0 & sonst \end{cases} \qquad \text{und} \\ \mu : \quad \mathbb{R} \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ t \quad &\mapsto \quad \begin{cases} (\sin(t) + \sqrt{c})^2 & t \in]\arcsin(-c), -\arcsin(-c) + \pi[\\ (\sin(t) + \sqrt{c})^2 & t \in]\arcsin(-c) - 2\pi, -\arcsin(-c) - \pi[\\ 0 & sonst \end{cases} . \end{aligned}$$

Es handelt sich um die gesuchten Lösungen, die z.B. wegen $\lambda(-2\pi) = 0 \neq c = \mu(-2\pi)$ verschieden sind.

Anmerkung (weil ja hier keine Begründung gefordert ist):
Mit derselben Rechnung wie in Teil a) und mit $2\sqrt{|0|} \cdot \cos(t) = 0$ sieht man leicht, dass μ und λ Lösungen der Differentialgleichungen sind, die - wie man mit ein wenig Schreibarbeit sehen kann - auch tatsächlich stetig und stetig differenzierbar sind. Die interessante Frage ist hierbei die Stetigkeit der Ableitung. Diese ist an dieser Stelle gegeben, weil $\arcsin(-c)$ doppelte Nullstelle von $t \mapsto (\sin(t) + \sqrt{c})^2$ ist.