H18T1A1

a) Bestimme die Menge $K \subset \mathbb{R}$, die genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$ enthält, für welche die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^k}{\sqrt{k}}$ gegen eine reelle Zahl konvergiert.

b) Für $a \in \mathbb{C}$ bezeichne $\gamma_a : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ den durch $\gamma_a(t) := a+2e^{it}$ beschriebenen Weg. Bestimme den Wert des komplexen Wegintegrals

$$\int_{\gamma_a} \frac{1-2z^2}{z^3} dz$$

für alle $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| \neq 2$.

Zu a):

Wir formen die gegebene Reihe zunächst um:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{\sqrt{k}} \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)^k$$

Wir können die Reihe damit als Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $a = -\frac{3}{2}$ auffassen. Die Potenzreihe konvergiert in jedem Fall innerhalb des Konvergenzkreises, dessen Radius wir mithilfe des Quotientenkriteriums bestimmen können: Betrachte

$$L := \limsup \frac{\frac{2^{k+1}}{\sqrt{k+1}}}{\frac{2^k}{\sqrt{k}}} = \limsup \left[2 \cdot \frac{\sqrt{k}}{k+1}\right] = \limsup \left[2 \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{k}}}\right] = 2 \cdot 1 = 2$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist damit $\rho := \frac{1}{L} = 1/2$. Insofern konvergiert die obige Reihe für $x \in]-2, -1[$ und divergiert für $x \in]-\infty, -2[$ und $x \in]-1, \infty[$.
Für die beiden noch nicht untersuchten Punkte stellen wir fest:
Ist $x = -2$, so ist $\frac{(2x+3)^k}{\sqrt{k}} = (-1)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$. Weil die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$ nach dem Leibnizkriterium.
Ist $x = -1$, so gilt $\frac{(2x+3)^k}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{k^{1/2}}$. Weil Reihen der Form $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ genau im Fall $\alpha > 1$ konvergieren, divergiert die Reihe hier.
Insgesamt folgt $K = [-2, -1[$.

Zu b):

Wir berechnen zuerst die Umlaufzahl des offensichtlich geschlossenen, stückweisen C^1-Weges γ_a um a:

$$n(\gamma_a, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_a} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+2e^{it}-a}\cdot 2ie^{it}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\cdot i\cdot 2\pi = 1.$$

Ist nun 0 in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\setminus \mathrm{Spur}(\gamma_a)$ wie a - weil γ_a einen Kreisweg mit Radius 2 um a parametrisiert ist das äquivalent zu $|a-0|<2$ - so gilt $n(\gamma_a,0) = n(\gamma_a,a) = 1$; andernfalls liegt 0 in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\setminus \mathrm{Spur}(\gamma_a)$, weshalb für $|a|>2$ gerade $n(\gamma_a,0)=0$ folgt. Weiter bemerken wir, dass $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & 1-2z^2 \end{array}$ eine holomorphe Funktion mit $f'(z) = -4z$ und $f''(z) = -4$ definiert und wenden schließlich die Cauchy-Integralformel an:

$$\int_{\gamma_a} \frac{1-2z^2}{z^3}dz = \int_{\gamma_a} \frac{f(z)}{(z-0)^{2+1}} = \frac{2\pi i}{2!}\cdot n(\gamma_a,0) f''(0) = \begin{cases} -4\pi i & |a|<2 \\ 0 & |a|>2 \end{cases}.$$