H17T3A5

Sei $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto\sum_{k=0}^{z^k} a_k z^k$ holomorph.

a) Stelle für $k\in\mathbb{N}_0$ und $r>0$ die Koeffizienten a_k der obigen Potenzreihe durch ein Wegintegral über $\{z\in\mathbb{C}:|z|=r\}$ dar. Folgere daraus

$$|a_k|\le r^{-k}max\{|f(z)|:|z|=r\}$$

b) Für ein $n\in\mathbb{N}_0$ gelte zusätzlich $\limsup_{|z|\to\infty}|z|^{-n}|f(z)|<\infty$. Zeige, dass f ein Polynom vom Grad $\le n$ ist.

c) Für ein $n\in\mathbb{N}_0$ gelte nun zusätzlich $\liminf_{|z|\to\infty}|z|^{-n}|f(z)|>0$. Zeige, dass f ein Polynom vom Grad $\ge n$ ist.

Zu a):

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\quad,\quad\gamma_r:[0,2\pi]\to\mathbb{C},t\mapsto re^{it}$$

Dabei ist γ_r ein geschlossener, stückweiser C^1-Weg. Die Umlaufzahl für diesen Weg ist:

$$n(\gamma_r,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}i}{re^{it}}dt=1$$

Cauchy-Integralformel: $f^{(k)}(0)n(\gamma_r,0)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}}d\xi$

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}}d\xi$$

$$|a_k|=\frac{1}{2\pi}\Big|\frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}}d\xi\Big|=\frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{it})}{(re^{it})^{k+1}}re^{it}idt\Big|=\frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{it})}{(re^{it})^{k}}dt\Big|\le$$
$$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(re^{it})|}{r^k}dt\le\frac{max\{|f(z)|:|z|=r\}}{r^k}$$

Zu b):

$c := \limsup_{|z|\to\infty} |z|^{-n}|f(z)| < \infty \Leftrightarrow$ Für alle $\epsilon > 0$ gibt es $R(\epsilon) > 0$, sodass $|z|^{-n}|f(z)| < c + \epsilon \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R(\epsilon)\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R(\epsilon)\}$. Für $k \in \mathbb{N}, k > n$ gilt: $|a_k| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}} d\xi\right|$.

$$\Rightarrow |a_k| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^k} dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\left|\frac{f(re^{it})}{(re^{it})^k}\right|}_{<c+\epsilon} dt \leq$$

$$\underbrace{\leq}_{r>R(\epsilon)} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (c+\epsilon) r^{n-k} dt = (c+\epsilon) r^{n-k} \to_{r\to\infty} 0$$

d.h. $a_k = 0$ für $k > 0$, daher ist f Polynom vom Grad $\leq n$

Zu c):

$b := \liminf_{|z|\to\infty} |z|^{-n}|f(z)| > 0 \Leftrightarrow$ Für alle $\epsilon > 0$ gibt es $R(\epsilon) > 0$, sodass $|z|^{-n}|f(z)| > b - \epsilon$ für alle $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| > R(\epsilon)\}$. Für $\epsilon = \frac{b}{2}$ gilt: $|z|^{-n}|f(z)| > \frac{b}{2}$ für alle $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| > R(\frac{b}{2})\}$. Für die Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n f(\frac{1}{n})$ ist $g\big(\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{R(\frac{b}{2})}\}\big)$ nicht dicht in $\mathbb{C}$, d.h. 0 ist keine wesentliche Singulariät von g und von $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$ bzw. von f.