Herbst 17 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ stetig mit $\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t = \infty$, und sei $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + f(t)x = 0 \quad \text{mit} \quad x(0) = 1.$$

Zeigen Sie:
Die Lösung x besitzt unendlich viele Nullstellen, die keinen Häufungspunkt besitzen, in jeder Nullstelle hat x eine von Null verschiedene Ableitung, und zwischen zwei benachbarten Nullstellen ist x entweder positiv und konkav oder negativ und konvex.

Lösungsvorschlag:

Die Differentialgleichung ist linear von zweiter Ordnung, für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt es daher eine eindeutige Lösung auf $[0,\infty)$ mit $x'(0) = x_0$ und $x(0) = 1$. Weil die Nullfunktion eine Lösung der Differentialgleichung ist, in jeder Nullstelle verschwindende Ableitung hat, aber die Anfangsbedingung nicht erfüllt, folgt dass x in jeder Nullstelle eine von Null verschiedene Ableitung hat. Wir zeigen nun zunächst die folgende Aussage:
Für alle $t_0 \in [0,\infty)$ mit $x(t_0) \neq 0$, gibt es eine Nullstelle t_1 von x mit $t_1 > t_0$. Die Menge $\{t \in (t_0,\infty) : x(t) = 0\}$ ist also nichtleer, nach unten beschränkt und abgeschlossen, weil x stetig ist. Sie besitzt also ein Minimum t_2 für welches $\operatorname{sgn}(x'(t_2)) = -\operatorname{sgn}(x(t_0))$ gilt.
Sei $t_0 \in [0,\infty)$ beliebig, aber keine Nullstelle von x. Wir setzen zunächst $x(t_0) > 0$ voraus und nehmen an, dass x keine Nullstelle hat, die größer als t_0 ist, dann ist $x(t) > 0$ für alle $t > t_0$, weil x mindestens zweimal differenzierbar sein muss, also stetig ist. Aus der Differentialgleichung folgt $x''(t) = -f(t)x(t) \leq 0$ für alle $t > t_0$, also ist x konkav und die erste Ableitung x' fällt monoton. Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle, nämlich $x'(t_0) \leq 0$ und $x'(t_0) > 0$:
$x'(t_0) \leq 0$: Weil f nicht konstant 0 sein kann (sonst wäre das Integral 0), muss es ein $t > t_0$ geben, für das $f(t) > 0$ ist und daher $x'(t) < 0$ ist, woraus $x' > 0$ auf $[t,\infty)$ folgt, weil die Ableitung monoton fallend ist. Auf $[t,\infty)$ ist nun $x(s) = x(s) - x(t) + x(t) = x(t) + \int_t^s x'(u)\,\mathrm{d}u \leq x(t) + x'(t)(s-t)$, was für $s \to \infty$ gegen $-\infty$ divergiert, im Widerspruch zu $x > 0$. Hier ergibt sich also ein Widerspruch und dieser Fall tritt nicht ein.
$x'(t_0) > 0$: Falls es ein $u > 0$ mit $x'(u) \leq 0$ gibt, erhalten wir analog zu gerade einen Widerspruch, also muss $x' > 0$ auf $[t_0,\infty)$ sein, woraus sofort folgt, dass x monoton wächst. Wegen $x(t_0) > 0$ besitzt also x eine echt positive untere Schranke und es gilt $\ddot{x}(t) = -f(t)x(t) \leq -f(t)x(t_0)$ für alle $t > t_0$. Nun gilt für alle $T > t_0$ die Abschätzung

$$x'(T) = x'(T) - x'(t_0) + x'(t_0) = x'(t_0) + \int_{t_0}^T x''(u)\,\mathrm{d}u \leq x'(t_0) - x(t_0)\int_{t_0}^T f(u)\,\mathrm{d}u,$$

was für $T \to \infty$ gegen $-\infty$ divergiert, was wiederum $x' > 0$ widerspricht.
In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch, weshalb $x(t_0) > 0$ nicht möglich ist. Betrachten wir also $x(t_0) < 0$, nehmen wieder an, dass x keine Nullstelle hat und unterscheiden die Fälle $x'(t_0) \geq 0$ und $x'(t_0) < 0$, so führt eine ähnliche Argumentation wieder auf Widersprüche. Daher ist auch dies unmöglich. Daher ist unsere

Annahme, dass x keine Nullstelle hat in jedem Fall falsch und x muss eine Nullstelle besitzen, die größer als t_0 ist. Wir betrachten jetzt die kleinste Nullstelle t_2, die größer als t_0 ist. Wir haben bereits gezeigt, dass $x'(t_2) \neq 0$ ist. Wir wollen nun zeigen, dass das Vorzeichen sich vom Vorzeichen von $x(t_0)$ unterscheidet. Sei $x(t_0) > 0$. Angenommen $x'(t_2)$ wäre ebenso positiv, dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass $x' > 0$ auf $(t_2 - \delta, t_2 + \delta)$ gilt, weil die Ableitung stetig ist. Damit wäre x auf diesem Intervall strikt monoton wachsend und somit negativ auf $(t_2 - \delta, t_2)$, weil t_2 eine Nullstelle von x ist. Dann muss es nach Bolzanos Nullstellensatz (oder dem Zwischenwertsatz) ein $t_3 \in (t_0, t_2)$ geben (wähle ein $v \in (t_2 - \delta, t_2)$, das größer als t_0 ist, dann liegt eine Nullstelle zwischen t_0 und v und damit auch im behaupteten Intervall, welches eine Obermenge ist) was der Minimalität von t_2 widerspricht. Also muss $x'(t_2) < 0$ sein. Wieder behandelt man den Fall $x(t_0) < 0$ sehr ähnlich und führt die Annahme $x'(t_2) < 0$ zu einem Widerspruch und schließt auf $x'(t_2) > 0$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen und wir können nun die zu zeigende Aussage beweisen.
Wegen $x(0) = 1 > 0$, gibt es nach unserem Lemma eine positive Nullstelle von x, in welcher die Ableitung negativ ist. Angenommen es gäbe nur endlich viele Nullstellen, dann gibt es eine größte Nullstelle $n \in (0, \infty)$. Für $t > n$ ist x entweder strikt positiv oder strikt negativ, es ist also $x(2n) \neq 0$. Nach unserem Lemma gibt es nun eine Nullstelle von x, die größer als $2n$ und daher auch größer als n ist, im Widerspruch zur Maximalität von n. Also muss es unendlich viele Nullstellen geben. Angenommen die Nullstellenmenge hätte einen Häufungspunkt f, dann finden wir eine Folge von Nullstellen von x die gegen f konvergiert. Weil jede reelle Folge eine monotone Teilfolge besitzt, können wir durch Übergang zu dieser Teilfolge, die den gleichen Grenzwert hat, von einer monotonen Folge ausgehen. Weil die Folge so gewählt werden kann, dass keines der Folgeglieder mit f übereinstimmt (Definition von Häufungspunkten einer Menge), kann die Folge weiterhin strikt monoton gewählt werden. Wir nehmen an, dass die Folge monoton wächst, man kann den Fall einer monoton fallenden Teilfolge wieder sehr ähnlich behandeln. Sei also $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine strikt monoton wachsende Folge von Nullstellen von x, die gegen f konvergiert. Angenommen $x'(t_1) > 0$, dann ist x strikt positiv auf (t_1, t_2) und Anwendung unseres Lemmas auf $s_1 = \frac{t_1+t_2}{2} \in (t_1, t_2)$ zeigt $x'(t_2) < 0$. Auf (t_2, t_3) ist x dann strikt negativ und unser Lemma liefert wegen $s_2 = \frac{t_2+t_3}{2} \in (t_2, t_3)$ wieder $x'(t_3) > 0$. Induktiv folgt $x'(t_k) > 0$ für alle ungeraden k und $x'(t_k) < 0$ für alle geraden k. Weil x' stetig ist, folgt durch Betrachtung der Teilfolgen $0 \geq \lim\limits_{n\to\infty} x'(t_{2n}) = x'(f) = \lim\limits_{n\to\infty} x'(t_{2n-1}) \geq 0$, also $x'(f) = 0$. Gleichzeitig ist aber wegen der Stetigkeit von x auch $x(f) = \lim\limits_{n\to\infty} x(t_n) = 0$, also hat x eine Nullstelle mit verschwindender Ableitung, ein Widerspruch zum Anfang des Beweises. Ist nun $x'(t_1) < 0$ kann man das gleiche Argument nochmal führen oder stattdessen die Teilfolge $(x'(t_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten. Auch in diesem Fall ergibt sich ein Widerspruch und die Nullstellen von x häufen sich nirgends.
Seien zuletzt $y < z$ zwei benachbarte Nullstellen von x, dann wechselt x auf (y, z) das Vorzeichen nicht, sonst gäbe es eine Nullstelle zwischen y und z. Also ist x entweder strikt positiv und daher $x''(t) = -f(t)x(t) \leq 0$ also x konkav auf dem Intervall oder es ist x strikt negativ und $x''(t) = -f(t)x(t) \geq 0$ und x damit konvex zwischen den Nullstellen. Damit ist die Aufgabe gelöst. Zusätzlich stellen wir fest, dass sich die beiden Fälle positiv und konkav bzw. negativ und konvex abwechseln.

$\mathcal{J.F.B.}$