H17T3A3

Für $u_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man für $t \geq 0$ das Anfangswertproblem

$$u'(t) = u(t) + \frac{1}{1+t}, \quad u(0) = u_0$$

Zeige:

a) Für jedes u_0 existiert eine eindeutige Lösung auf ganz $\mathbb{R}^+$.

b) $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = \infty$ für jedes $u_0 \geq 0$.

c) Es existiert ein $u_0 < 0$, so dass $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = -\infty$

d) Es existiert ein $\alpha < 0$ so dass $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = \infty$ für jedes $u_0 > \alpha$, $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = -\infty$ für jedes $u_0 < \alpha$ und $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) \in \mathbb{R}$ für $u_0 = \alpha$.

Zu a):

Sei $g :]-1,\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{1+t} \in C^1(]-1,\infty[)$ und damit hat die Differentialgleichung die Form $u' = 1u + g(t)$, $u(0) = x_0$ einer inhomogenen, skalaren linearen Differentialgleichung mit stetigem g. Damit hat laut Existenz- und Eindeutigkeitssatz für linear beschränkte rechte Seite auf $]-1,\infty[$ eine eindeutige maximale Lösung, die laut Lösungsformel für skalare, lineare Differentialgleichung

$$\lambda :]-1,\infty[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \exp(\int_0^t 1 ds) u_0 + \exp(\int_0^t ds) \int_0^t \exp(-\int_0^s dr) g(s) ds =$$

$$e^t u_0 + e^t \int_0^t e{-}s \frac{1}{1+s} ds$$

Damit ist jede Lösung der Differentialgleichung, die auf $[0,\infty[$ definiert ist, gerade die Einschränkung von λ auf $[0,\infty[$.

Zu b):

$u_0 \geq 0$:

$$e^t u_0 + e^t \underbrace{\int_0^t \underbrace{e^{-s} \frac{1}{1+s}}_{>0} ds}_{\geq 0 \text{ für } t\geq 0,\ >0 \text{ für } t>0} \underbrace{\geq}_{t\geq 1} e^t \underbrace{\int_0^1 e^{-s} \frac{1}{1+s} ds}_{>0} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$$

$$\Rightarrow \lambda(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty \text{ für } u_0 \geq 0$$

Zu c):

Da für $s \geq 0$ gilt $\left|\frac{e^{-s}}{1+s}\right| \leq e^{-s}$ und $\int\limits_0^t e^{-s} ds = -e^{-s}\Big|_0^t = 1 - e^{-t}$ ist $[0,\infty[\to \mathbb{R}$, $s \mapsto \frac{e^{-s}}{1+s}$ integrierbar mit

$$0 \leq \int\limits_{[0,\infty[} e^{-s}\frac{1}{1+s}ds = \lim_{t\nearrow\infty} \underbrace{\int\limits_0^t \frac{e^{-s}}{1+s}ds}_{=:\gamma(t)} \leq 1$$

(nach Majorantenkriterium)

$$\Rightarrow \lambda(t) = e^t(u_0 + \gamma(t))$$

$$\beta := \sup\{\gamma(t) : t \geq 0\} = \lim_{t\nearrow\infty} \gamma(t)$$

Ist $u_0 < 0$ mit $u_0 + \beta < 0$, dann ist $\varepsilon := -\frac{1}{2}(u_0 + \beta) > 0$, $u_0 = -\beta - 2\varepsilon$

$$\Rightarrow u_0 + \gamma(t) = -\beta - 2\varepsilon + \gamma(t) \leq -\beta - 2\varepsilon + \beta = -2\varepsilon \text{ für alle } t \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda(t) = e^t(u_0 + \gamma(t)) \leq e^t(-2\varepsilon) \xrightarrow[t\to\infty]{} -\infty$$

Zu d):

- Ist $u_0 < 0$ mit $u_0 + \beta > 0$, dann ist $\varepsilon := \frac{1}{2}(u_0 + \beta) > 0$, daher gibt es nach Definition des Supremums ein $T_\varepsilon \geq 0$ so dass $\gamma(t) \geq \beta - \varepsilon$ für alle $t \geq T_\varepsilon$

$$u_0 + \gamma(t) \underbrace{\geq}_{t\geq T_\varepsilon} u_0 + \beta - \varepsilon = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \lambda(t) \geq \lim_{t\to\infty} e^t\varepsilon = \infty$$

- Ist $u_0 + \beta = 0$

$$\lambda(t) = e^t(u_0 + \gamma(t)) = \frac{\overbrace{u_0 + \gamma(t)}^{\xrightarrow[t\to\infty]{}0}}{\underbrace{e^{-t}}_{\xrightarrow[t\to\infty]{}0}}$$

$$(u_0 + \gamma(t))' = \frac{d}{dt}(\int\limits_0^t e^{-s}\frac{1}{1+s}ds) = \frac{e^{-t}}{1+t} \;; \qquad \frac{d}{dt}(e^{-t}) = -e^{-t}$$

$$\frac{(u_0 + \gamma(t))'}{(e^{-t})'} = -\frac{1}{1+t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

Nach dem Satz von l'Hospital existiert $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$.