H17T3A2

Betrachte die Sinus-Cardinalis-Funktion

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Zeige, dass f zu einer ganzen Funktion fortgesetzt werden kann.

b) Zeige, dass die fortgesetzte Funktion über $\mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht absolut integrierbar ist.

Zu a):

$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\,,\ z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ holomorph mit isolierter Singularität bei 0.
Die Reihenentwicklung vom Sinus liefert:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

Der Konvergenzradius von f ist ∞, da $L = \frac{1}{\rho} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}}$.
$\Rightarrow\ F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$ ist eine holomorphe Fortsetzung von f.

Zu b):

zzg.: $F|_{\mathbb{R}}$ uneigentlich Riemann-integrierbar, nicht integrierbar

$$|\sin x| \left\{ \begin{array}{ll} \geq & \frac{1}{\sqrt{2}} \text{für} x \in [(2k-1)\frac{\pi}{4}, (2k+1)\frac{\pi}{4}] \\ \leq & \frac{1}{\sqrt{2}} \text{für} x \in [(2k+1)\frac{\pi}{4}, (2k+3)\frac{\pi}{4}] \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |F(x)| dx \geq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{1}_{[(2k-1)\frac{\pi}{4}, (2k+1)\frac{\pi}{4}]}(x) dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{4}} = \infty$$

denn die letzte Summe ist die harmonische Reihe, die divergiert.
Die letzte Ungleichung folgt aus $\frac{1}{|x|} \geq \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{4}}$ für $x \in [(2k-1)\frac{\pi}{4}, (2k+1)\frac{\pi}{4}]$.
$\Rightarrow |F|_{\mathbb{R}}\,|$ ist nicht integrierbar.

Nebenrechnung: $\boxed{k \in \mathbb{Z} : \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |F|_{\mathbb{R}}|(x)dx = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\frac{\sin x}{x}|dx \leq \begin{cases} \frac{1}{k\pi}\int_0^\pi \sin x dx & k \geq 0 \\ \frac{1}{|k+1|\pi}\int_0^\pi \sin x dx & k < 0 \end{cases}}$

$\int_{-l\pi}^{l\pi} F|_{\mathbb{R}}(x)dx = \sum_{k=-l}^{k=l}(-1)^k \underbrace{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |F|_{\mathbb{R}}|dx}_{\text{in k monoton fallend} k\to\infty}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium.

Berechne den Grenzwert (für $0 < r < R < \infty$):

$$\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2i}\int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}dx \underbrace{=}_{y=-x} \frac{1}{2i}\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}dx + \frac{1}{2i}\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iy}}{y}dy$$

Definiere den Weg $\gamma_{r,R} = \gamma_1 \dotplus \gamma_2 \dotplus \gamma_3 \dotplus \gamma_4$ mit

- $\gamma_1 : [-R, -r] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, t \mapsto t$
- $-\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, t \mapsto re^{it}$
- $\gamma_3 : [r, R] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, t \mapsto t$
- $\gamma_4 : [0, \pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, t \mapsto Re^{it}$

Da $h : \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ holomorph ist, gilt $\int_{\gamma_{r,R}} h(z)dz = 0$ für $0 < r < R < \infty$.

$$\Big|\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} iRe^{it}dt\Big| \leq \int_0^\pi |e^{iRe^{it}}|dt = \int_0^\pi |e^{iR(\cos t + i\sin t)}|dt = \int_0^\pi e^{-R\sin t}dt =$$

$$= \int_0^\delta e^{-R\sin t}dt + \int_0^{\pi-\delta} e^{-R\sin t}dt + \int_{\pi-\delta}^\pi e^{-R\sin t}dt \leq \int_0^\delta dt + \int_0^{\pi-\delta} e^{-R\sin\delta}dt + \int_{\pi-\delta}^\pi dt =$$

$= 2\delta + e^{-R\sin\delta}(\pi - 2\delta)$

$\frac{e^{iz}-1}{z}$ hat hebbare Singularität bei 0 $\Rightarrow$ beschränkt: es gibt eine Umgebung von 0, sodass $\left|\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}-1}{z}dz\right| \leq Mr\pi$.

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz} - 1}{z}dz \to_{r\to 0} 0$$