H17T3A1

Es sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus [-1, 1] = \mathbb{C} \setminus \{z \in C : -1 \leq Re(z) \leq 1, Im(z) = 0\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Auf Ω existiert keine holomorphe Logarithmusfunktion der Funktion $z \to f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$, d.h. es gibt keine holomorphe Funktion $g : \Omega \to C$ mit $e^{g(z)} = f(z)$ für alle $z \in \Omega$.

b) Auf Ω existiert eine holomorphe Logarithmusfunktion der Funktion $z \to h(z) = i\frac{z+1}{z-1}$, dh. es gibt eine holomorphe Funktion $w : \Omega \to C$ mit $e^{w(z)} = h(z)$ für alle $z \in \Omega$.

Zu a)

Da f nullstellenfrei ist, existiert der Quotient $\frac{f'}{f}: \Omega \to \mathbb{C}; z \to \frac{f'(z)}{f(z)}$ und definiert eine holomorphe Funktion. Mit $f'(z) = -\frac{2z}{(z^2-1)^2}$ ergibt sich

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-2z\left(z^2-1\right)}{\left(z^2-1\right)^2} = \frac{-2z}{z^2-1} = -\frac{2z}{(z+1)(z-1)} \textit{ für alle } z \in \Omega$$

Da f nullstellenfrei ist, besitzt f lt.VL genau dann einen holomorphen Logarithmus, wenn $\frac{f'}{f}: \Omega \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion besitzt. Da Ω ein Gebiet ist, müssen wir lt.VL $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ für geschlossene, stückweise C^1-Wege $\gamma: [\alpha, \beta] \to \Omega$ in Ω untersuchen. Wegen $\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{2z}{(z+1)(z-1)}$ gibt es eine holomorphe Fortsetzung $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}\setminus\{-1, 1\};\ z \to -\frac{2z}{(z+1)(z-1)}$ und da $Spur(\gamma) \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{C}\setminus\{-1, 1\}$ für jeden geschlossenen Weg γ in Ω, gilt nach Definition des Kurvenintegrals

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_\gamma h(z) dz.$$

Wegen $\lim_{z\to 1} \left|h(z)\right| = \lim_{z\to -1} \left|h(z)\right| = \infty$, $\lim_{z\to 1} (z-1)h(z) = -1$ und $\lim_{z\to -1} (z+1)h(z) = -1$ sind -1 und 1 Pole erster Ordnung von h mit Res(h,1) = -1 = Res(h,-1).
Da für jeden geschlossenen Weg γ in Ω dann $Spur(\gamma) \cap \{-1, 1\} = \emptyset$ ist, gilt laut Residuensatz $\int_\gamma h(z) dz = 2\pi i \left(Res(h,1)n(\gamma,1) + Res(h,-1)n(\gamma,-1)\right)$.

Für z.B. $\gamma_2\colon [0, 2\pi] \to \Omega; t \to 2e^{it}$ ist dann $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_{\gamma_2} h(z)dz = -4\pi i \neq 0$, also hat $\dfrac{f'}{f}$ keine Stammfunktion auf Ω, also hat f keinen holomorphen Logarithmus.

Beachte: γ_2 ist nullhomolog in $\mathbb{C}\setminus\{-1, 1\}$, aber nicht in Ω.

Zu b) *Analog zu a)*

Da f nullstellenfrei ist, existiert der Quotient $\dfrac{h'}{h}\colon \Omega \to \mathbb{C}; z \to \dfrac{h'(z)}{h(z)}$ und definiert eine holomorphe Funktion. Mit $h'(z) = \dfrac{-2i}{(z-1)^2}$ ergibt sich

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{-2\,(z-1)}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{-2}{z^2-1} = \frac{-2}{(z+1)(z-1)} \; \text{für alle } z \in \Omega$$

Somit gibt es eine holomorphe Fortsetzung $g\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}\setminus\{-1, 1\};\ z \to \dfrac{-2}{(z+1)(z-1)}$.

Wegen $\lim_{z\to 1} |g(z)| = \lim_{z\to -1} |g(z)| = \infty$, $\lim_{z\to 1}(z-1)g(z) = -1$ und $\lim_{z\to -1}(z+1)g(z) = 1$ sind -1 und 1 Pole erster Ordnung von g mit Res(g,1) = -1, Res(g,-1) = 1.

Da für jeden geschlossenen Weg γ in Ω dann $Spur(\gamma) \cap \{-1, 1\} = \emptyset$ ist und [-1, 1] in einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}$\Spur(γ) liegt, d.h. da n(γ,1)=n(γ,-1) und da γ nullhomolog in $\mathbb{C} = (\mathbb{C}\setminus\{-1, 1\}) \cup \{-1,1\}$ ist, gilt laut Residuensatz

$$\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}dz = \int_\gamma g(z)dz = 2\pi i\left(Res(h,1)n(\gamma,1) + Res(h,-1)n(\gamma,-1)\right) = 0$$

für jeden geschlossenen stückweisen C^1-Weg γ in Ω. Damit hat $\dfrac{h'}{h}$ auf Ω eine holomorphe Stammfunktion G: Ω → $\mathbb{C}$. Für $z \in \Omega$ ist

$$\left(h(z)e^{-G(z)}\right)' = \left(h'(z) - h(z)G'(z)\right)e^{-G(z)} = \left(h'(z) - h(z)\frac{h'(z)}{h(z)}\right)e^{-G(z)} = 0,$$

d.h. $h(z)e^{-G(z)}$ ist konstant (da Ω zusammenhängend). Weil $h(z)e^{-G(z)} \neq 0 \; \text{für alle } z \in \Omega$, lässt sich diese Konstante in der Form e^ξ schreiben und $h(z)e^{-G(z)} = e^\xi$ ergibt aufgelöst $h(z) = e^{G(z)+\xi}$. Da G holomorph ist, ist mit G+ξ ein holomorpher Logarithmus von h gefunden.