Herbst 17 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im} z > 0\}$ bzw. $\mathbb{H}_- := \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im} z < 0\}$ die offene obere bzw. untere Halbebene in $\mathbb{C}$, und $\overline{\mathbb{H}_+} = \mathbb{H}_+ \cup \mathbb{R}$ und $\overline{\mathbb{H}_-} = \mathbb{H}_- \cup \mathbb{R}$ deren Abschluss.

(a) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Morera.

(b) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, deren Einschränkungen $f|_{\mathbb{H}_+}$ und $f|_{\mathbb{H}_-}$ auf die offene obere bzw. untere Halbebene holomorph sind.
Beweisen Sie, dass f holomorph ist.

(c) Formulieren Sie den Satz von Liouville für ganze holomorphe Funktionen.

(d) Gegeben Seien vier beschränkte stetige Funktionen $G_+, H_+ : \overline{\mathbb{H}_+} \to \mathbb{C}$ und $G_-, H_- : \overline{\mathbb{H}_-} \to \mathbb{C}$, deren Einschränkungen auf die obere bzw. untere offene Halbebene holomorph sind. Es gelte $G_+(x) - G_-(x) = H_+(x) - H_-(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $G_+ = H_+ + c$ und $G_- = H_- + c$ gilt.

Lösungsvorschlag:

(a) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ stetig, wobei $D \subset \mathbb{C}$ offen ist. Gilt für jedes Dreieck $\Delta \subset D$, dass das Kurvenintegral $\int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z$ verschwindet, so ist f holomorph.

(b) Wir wollen den Satz von Morera benutzen, dazu halten wir fest, dass $\mathbb{C}$ natürlich offen ist. Wir werden zunächst zeigen, dass für jedes Dreieck mit $\Delta \subset \overline{\mathbb{H}_+}$ das Kurvenintegral über den Rand verschwindet. Völlig analog kann man auch zeigen, dass dies für alle $\Delta \subset \overline{\mathbb{H}_-}$ gilt. Dazu halten wir kurz die Notation fest. Für paarweise verschiedene komplexe Zahlen z_0, z_1, z_2 definieren wir $[z_0; z_1; z_2]$ als das Dreieck mit Eckpunkten z_0, z_1, z_2 und parametrisieren $\partial[z_0; z_1; z_2]$ durch affin-lineare Verbindungen, d. h. mit

$$\gamma : [0,3] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = \begin{cases} z_0 + t(z_1 - z_0), & t \in [0,1) \\ z_1 + (t-1)(z_2 - z_1), & t \in [1,2] \\ z_2 + (t-2)(z_0 - z_2), & t \in (2,3] \end{cases}.$$

Nachdem sich das Dreieck nicht ändert, wenn wir die komplexen Zahlen z_0, z_1, z_2 permutieren, wählen wir diese o. B. d. A. immer so, das obige Parametrisierung positiv orientiert ist. Wir bezeichnen weiterhin den ersten Teilweg mit $\gamma_0 = \gamma|_{[0,1]}$, den zweiten mit $\gamma_1 = \gamma|_{[1,2]}$ und den dritten mit $\gamma_2 = \gamma|_{[2,3]}$. Diese Wege verbinden zwei Eckpunkte jeweils affin und ergeben aneinander gehängt den ursprünglichen Weg. Allgemeiner definieren wir für zwei verschiedene komplexe Zahlen u, v deren Verbindungsstrecke $[u; v]$ als die Kurve $\tau : [0,1] \to \mathbb{C}, \tau(t) = u + t(v - u)$ und für endlich viele paarweise verschiedene Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ setzen wir $[z_1; \ldots; z_n]$ als das n-Eck mit Eckpunkten $z_1, \ldots z_n$ und parametrisieren den Rand durch $[z_1; z_2] + [z_2; z_3] + \ldots [z_{n-1}; z_n] + [z_n; z_1]$. Sei nun $\Delta \subset \overline{\mathbb{H}_+}$ ein Dreieck, wir wollen zeigen das das Pfadintegral über den Rand verschwindet. Weil es sich bei jedem

Dreieck um eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ handelt und f stetig ist, wissen wir, dass f gleichmäßig stetig und beschränkt gegen ein $C > 0$ ist. Wir unterscheiden nun ein paar Fälle, je nachdem wie viele Eckpunkte auf $\mathbb{R}$ liegen.
Falls das Dreieck die reelle Achse nicht schneidet, so ist nichts zu zeigen, denn dann verschwindet das Integral nach Goursats Lemma bzw. Cauchys Integralsatz.
Liegen alle drei Eckpunkte auf $\mathbb{R}$, ist das Dreieck also ausgeartet, so müssen wir auch nichts zeigen, weil dann alle Teilverbindungen zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden und sich somit wegheben.
Nun liege nur ein Eck auf $\mathbb{R}$ welches o. B. d. A. z_0 sein soll, sonst benennen wir die Ecken um. Wir betrachten die ähnlichen, skalierten Dreiecke (siehe Skizze) $\Delta_n := [z_0; \gamma(\frac{1}{n}); \gamma(3 - \frac{1}{n})]$ mit Eckpunkten auf Δ und außerdem den Weg der den Vierecksrand $\Gamma_n := [\gamma(3 - \frac{1}{n}); \gamma(\frac{1}{n}); z_1; z_2]$. Es gilt dann

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\partial\Delta_n} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_n} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\partial\Delta_n} f(z)\mathrm{d}z,$$

weil die Verbindungsstrecke $[\gamma(\frac{1}{n}); \gamma(3 - \frac{1}{n})]$ je einmal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden und sonst die Parametrisierungen übereinstimmen. Das zweite Integral verschwindet nach Cauchys Integralsatz (oder Aufteilung in zwei Dreiecke und Nutzung von Goursats Lemma), weil der Weg geschlossen ist und in $\mathbb{H}_+$ verläuft, worauf f holomorph ist. Das zweite Integral können wir wegen der Beschänktheit von f gegen C betragsmäßig nach unten gegen 0 und nach oben gegen $C|\partial\Delta_n|$ abschätzen, was für $n \to \infty$ gegen 0, konvergiert, weil die Dreiecke sich auf den Punkt z_0 zusammenziehen. Damit verschwindet das Integral über diesen Dreiecksweg.
Jetzt betrachten wir noch Dreiecke bei denen zwei Ecken, d. h. eine Dreiecksseite auf $\mathbb{R}$ liegt. O. B. d. A. können wir wieder davon ausgehen, dass z_0 und z_1 die Ecken sind, die auf der reellen Achse liegen. Wir betrachten jetzt die skalierten Dreiecke $\Delta_n := [\gamma(1 + \frac{1}{n}); z_2; \gamma(3 - \frac{1}{n})]$, die wieder ganz in $\mathbb{H}_+$ liegen und damit nach Goursats Lemma oder Cauchys Integralsatz ein verschwindendes Randwegintegral besitzen. Zur Abkürzung setzen wir $p_n := \gamma(1 + \frac{1}{n})$ und $q_n = \gamma(3 - \frac{1}{n})$. Wir setzen die Definition von Wegintegralen ein und zerteilen das Integral in drei Integrale über die Dreiecksseiten. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\Delta_n} f(z)\mathrm{d}z = (z_2 - p_n) &\int_0^1 f(p_n + t(z_2 - p_n))\ \mathrm{d}t \\ + (q_n - z_2) &\int_0^1 f(z_2 + t(q_n - z_2))\ \mathrm{d}t \\ + (p_n - q_n) &\int_0^1 f(q_n + t(p_n - q_n))\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Wir wollen untersuchen, was für $n \to \infty$ passiert, dazu halten wir fest, dass $p_n \to z_1$ und $q_n \to z_0$ konvergieren, weil γ stetig ist. Wir zeigen, dass auch die Integranden gleichmäßig konvergieren, dann dürfen wir Grenzwertbildung und Integration vertauschen. Wir zeigen die gleichmäßige Konvergenz für den dritten Integranden, die anderen beiden können analog behandelt werden, sind aber einfacher, weil jeweils nur ein Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auftritt. Der punktweise Grenzwert ist wegen der Stetigkeit von f die Funktion $f(z_0 + t(z_1 - z_0))$, die Konvergenz ist auch gleichmäßig. Um das zu sehen sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gibt es $\delta > 0$ mit

$|v-w|<\delta \implies |f(v)-f(w)|<\varepsilon$ für $v,w\in\Delta$, weil f gleichmäßig stetig ist. Also ist $|f(q_n+t(p_n-q_n))-f(z_0+t(z_1-z_0))|<\varepsilon$ solange $|q_n+t(p_n-q_n)-z_0-t(z_1-z_0))|<\delta$ gilt. Wir schätzen für $t\in[0,1]$ folgendermaßen ab:

$$|q_n+t(p_n-q_n)-z_0-t(z_1-z_0))| \leq |q_n-z_0|+|t|(|p_n-z_1|+|q_n-z_0|) \leq |p_n-z_1|+2|q_n-z_0|.$$

Wegen der Konvergenz von p_n gegen z_1 und von q_n gegen z_0, gibt es ein $N\in\mathbb{N}$, sodass für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq N$ der letzte Term kleiner als δ wird, dann ist für alle $n\geq N$ und $t\in[0,1]$ aber auch $|f(q_n+t(p_n-q_n))-f(z_0+t(z_1-z_0))|<\varepsilon$, womit die behauptete gleichmäßige Konvergenz gezeigt ist. Mit den Grenzwertsätzen erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty}\int_{\Delta_n} f(z)\mathrm{d}z &= \lim_{n\to\infty}(z_2-p_n)\int_0^1 f(p_n+t(z_2-p_n))\ \mathrm{d}t \\
&+ \lim_{n\to\infty}(q_n-z_2)\int_0^1 f(z_2+t(q_n-z_2))\ \mathrm{d}t \\
&+ \lim_{n\to\infty}(p_n-q_n)\int_0^1 f(q_n+t(p_n-q_n))\ \mathrm{d}t \\
&= (z_2-z_1)\int_0^1 f(z_1+t(z_2-z_1))\ \mathrm{d}t \\
&+ (z_0-z_2)\int_0^1 f(z_2+t(z_0-z_2))\ \mathrm{d}t \\
&+ (z_1-z_0)\int_0^1 f(z_0+t(z_1-z_0))\ \mathrm{d}t \\
&= \int_\Delta f(z)\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

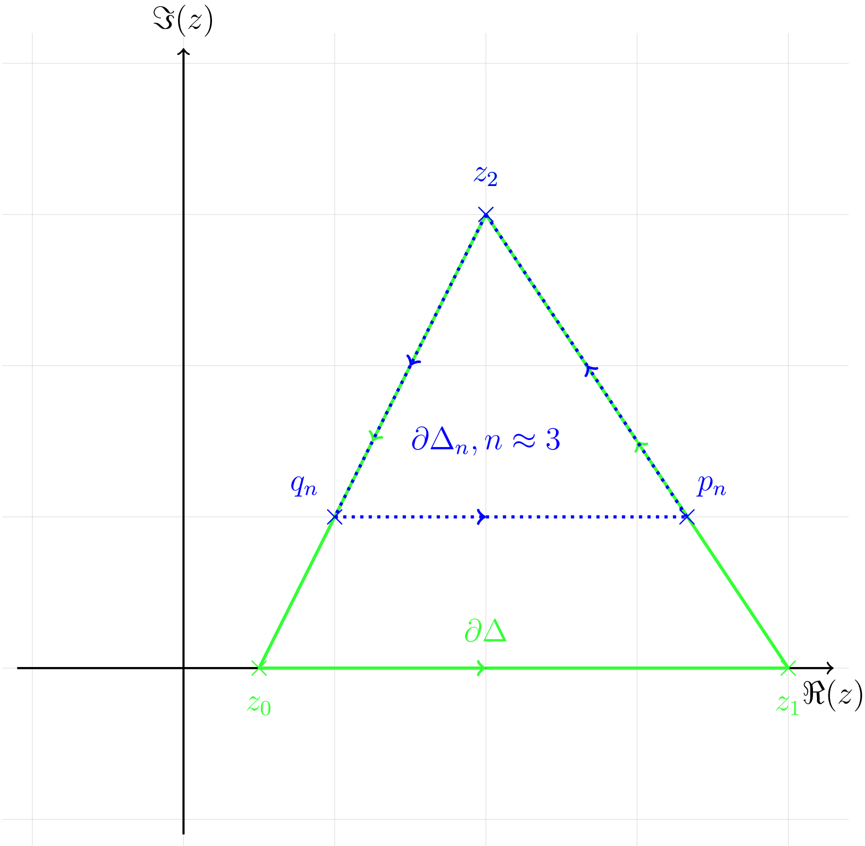
da das letzte Integral genau unserer Parametrisierung entspricht.
In jedem Fall verschwindet also das Integral über den Dreiecksweg. Nun zur eigentlichen Aufgabe. Sei $\Delta=[a;b;c]\subset\mathbb{C}$ ein beliebiges Dreieck. Falls dieses in einer der abgeschlossenen Halbebenen enthalten ist, so ist nach bisher gezeigtem das Integral über den Rand 0. Ansonsten gibt es genau zwei Schnittpunkte $d,e\in\mathbb{R}$ mit der reellen Achse, weil genau zwei Ecken in einer abgeschlossenen Halbebene und das dritte Eck in der anderen liegen muss, dabei kann höchstens ein Eck in $\mathbb{R}$ liegen. In jedem Fall haben wir genau zwei Schnittpunkte oder ein entartetes Dreieck, was wir analog zu zuvor bewiesenem behandeln können. Dabei sei d der Schnittpunkt auf der Dreiecksseite die a und b verbindet und e derjenige auf der Seite die a und c verbindet, ansonsten benennen wir um. Wir teilen das Dreieck nun in die drei Dreiecke $[a;d;e],[e;d;b]$ und $[c;e;b]$ auf, dann stimmt das Pfadintegral über Δ mit der Summe der Integrale über diese drei Dreiecke überein. Jedes davon ist in einer abgeschlossenen Halbebene enthalten, weswegen die drei Integrale alle verschwinden und wegen $0+0+0=0$ verschwindet auch das Integral über Δ. Nach dem Satz von Morera ist f also holomorph auf $\mathbb{C}$.

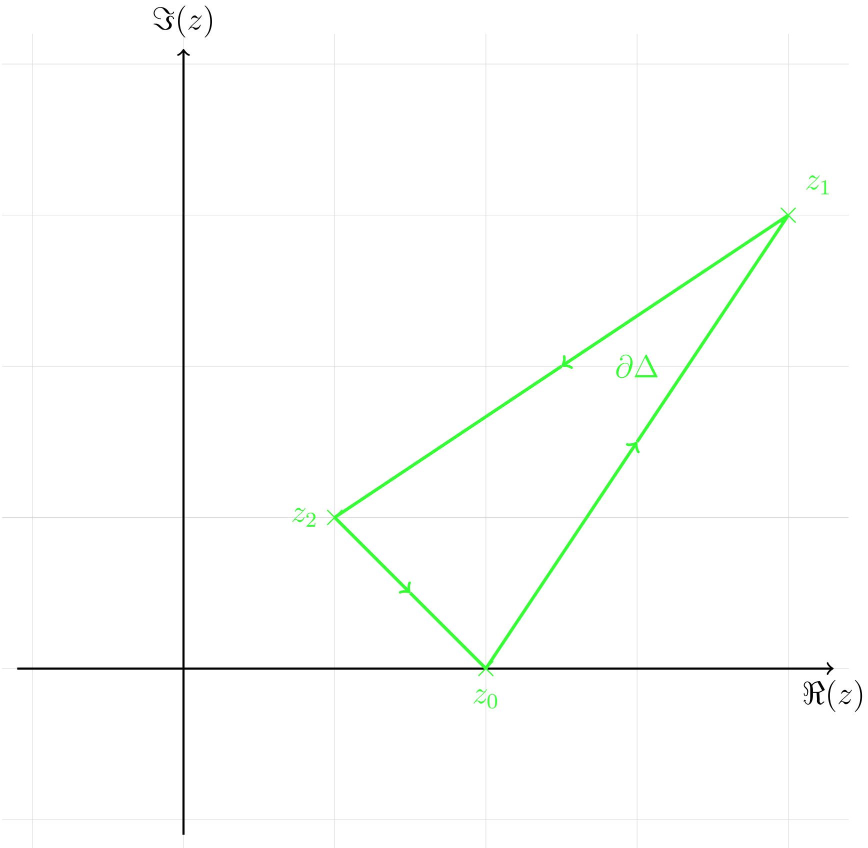
(c) Jede beschränkte, ganze Funktion ist konstant.

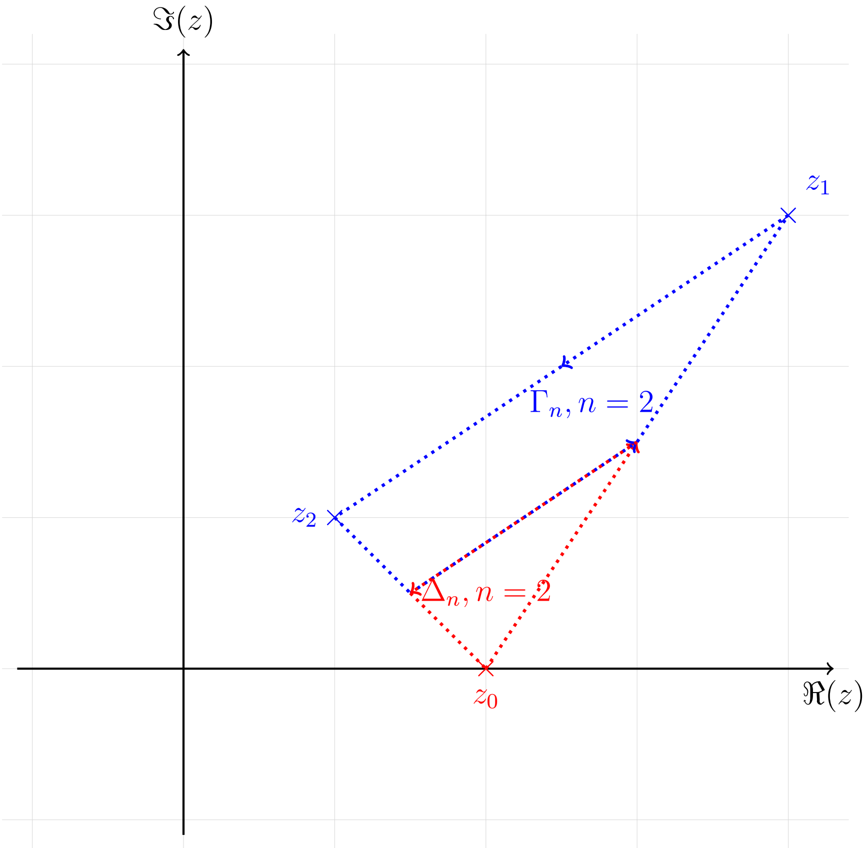
(d) Wir betrachten die Funktion $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=\begin{cases} G_+(x)-H_+(x), & x\in\overline{\mathbb{H}_+}, \\ G_-(x)-H_-(x), & x\in\mathbb{H}_-. \end{cases}$
Diese Funktion ist stetig, weil für $x\in\mathbb{R}$ $G_+(x)-G_-(x)=H_+(x)-H_(x)$, also

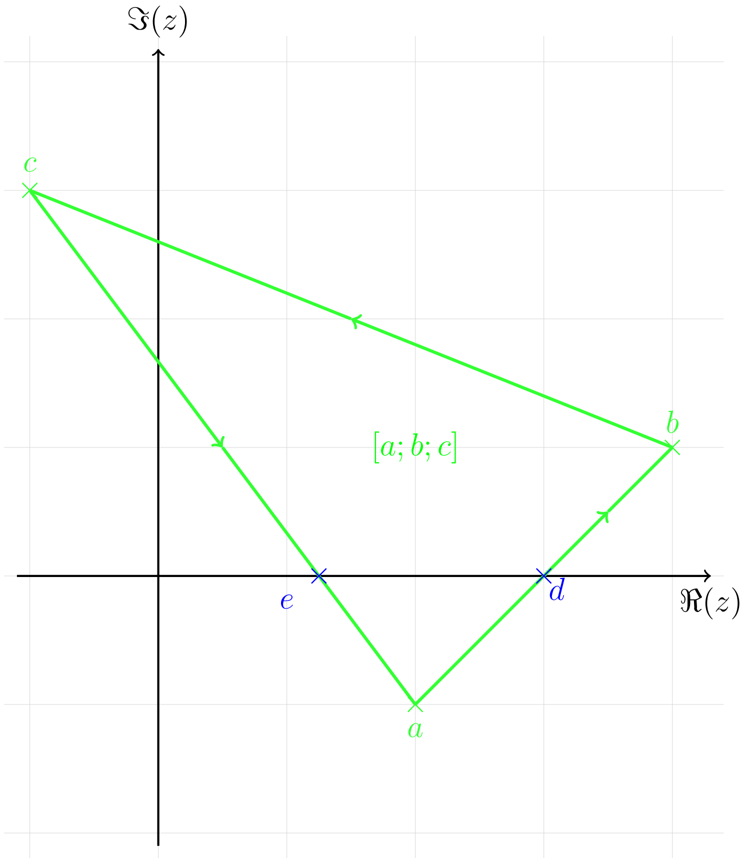
$G_+(x) - H_+(x) = G_-(x) - H_-(x)$ gilt, sie ist nach (b) holomorph, weil sie als Differenz holomorpher Funktionen jeweils eingeschränkt auf die offenen Halbebenen holomorph ist und die ist beschränkt, weil für alle $x \in \mathbb{C}$ mit der Dreiecksungleichung $|f(x)| \leq \|G_+\|_\infty + \|G_-\|_\infty + \|H_+\|_\infty + \|H_-\|_\infty < \infty$ abgeschätzt werden kann. Nach dem Satz von Liouville ist f konstant, sei diese Konstante c. Dann gilt $G_+ - H_+ = c$ und $G_- - H_- = c$, also $G_+ = H_+ + c$ und $G_- + H_- + c$, womit die Aussage gezeigt ist. Man beachte, dass diese beiden Gleichungen auch für $x \in \mathbb{R}$ gültig sind, weil $G_+ - H_+$ und $G_- - H_-$ dort übereinstimmen.

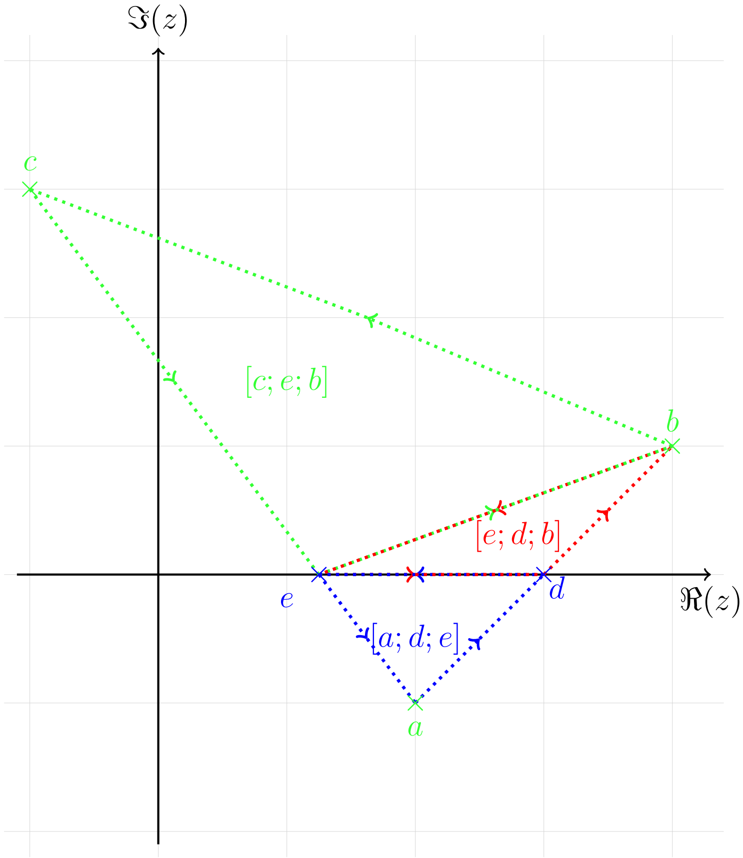
Die folgenden Grafiken veranschaulichen die Konstruktionen. Die erste Figur zeigt das Vorgehen für Dreiecke, bei denen zwei Ecken auf $\mathbb{R}$ liegen.
Die nächsten beiden zeigen das Vorgehen bei Dreiecken, mit genau einem Eck in $\mathbb{R}$.
Die letzten beiden zeigen die Zerlegung von Dreiecken, die in keiner abgeschlossenen Halbebene vollständig enthalten sind.




$\Im(z)$
z_1
$\partial\Delta$
z_2
z_0
$\Re(z)$


$\Im(z)$
z_1
$\Gamma_n, n = 2$
z_2
$\Delta_n, n = 2$
z_0
$\Re(z)$





$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$