Herbst 17 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das folgende Differentialgleichungssystem:

$$x'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) & g'(t) \\ -g'(t) & f'(t) \end{pmatrix} x(t)$$

Begründen Sie Ihre Wahl.

Hinweis: Die Matrix $\exp \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ kann hilfreich sein.

Lösungsvorschlag:

Wir beginnen damit die Matrix aus dem Hinweis auszurechnen. Das Ergebnis ist relativ bekannt, man kann es aber auch durch Diagonalisierung der Matrix oder mit der Definition herleiten. Letzteres werden wir nun tun. Es gilt

$$\begin{aligned}\exp \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &= \exp \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \right) = \exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \\ &= e^a \exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = e^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!},\end{aligned}$$

wobei $B := \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ definiert wird. Dabei wurde verwendet, dass Vielfache der Einheitsmatrix mit allen Matrizen kommutieren und $\exp(c\mathbb{1}) = e^c \mathbb{1}$ erfüllen und es wurde benutzt, dass für kommutierende Matrizen A, B auch $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ gilt. Wir berechnen $B^2 = -b^2\mathbb{1}$, womit wir diese Reihe berechnen können. Es gilt nämlich für $b \neq 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b^2)^k}{(2k)!}\mathbb{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b^2)^k}{(2k+1)!}B \\ \sum_{k=0}^{\infty} &\frac{(-1)^k b^{2k}}{(2k)!}\mathbb{1} + \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k+1}}{(2k+1)!}B = \cos(b)\mathbb{1} + \frac{\sin(b)}{b}B.\end{aligned}$$

Ist $b = 0$, so ist B die Nullmatrix und deren Exponential ist $\mathbb{1}$. Setzen wir alles zusammen und vereinfachen soweit wie möglich, erhalten wir $\exp \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(a) \end{pmatrix}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Es ist bekannt, dass lineare Systeme $y' = Ay$ mit konstanten $n \times n$-Matrizen A die allgemeine Lösung $y(t) = \exp(tA)y_0$ haben, wobei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig ist. Wir müssen daraus nun geeignet die Lösung dieses Problems ableiten. Wir stellen dank der Kettenregel fest, dass für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $t \mapsto \exp \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ -g(t) & f(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ eine Lösung ist, was wir nun auch direkt als $t \mapsto e^{f(t)} \begin{pmatrix} \cos(g(t))x_0 + \sin(g(t))y_0 \\ -\sin(g(t))x_0 + \cos(g(t))y_0 \end{pmatrix}$

schreiben können, indem wir die obige Matrixexponentialformel anwenden und ausmultiplizieren. Damit haben wir die allgemeine Lösung bestimmt. Sammelt man die Terme mit x_0 bzw. y_0 getrennt, so erhält man das gewünschte Fundamentalsystem. Etwas genauer: Man kann das Fundamentalsystem auch aus dem Matrixexponential ablesen, dieses sind nämlich genau die Spalten (was der Wahl von $x_0 = 0$ oder $y_0 = 0$ entspricht). Also ist $e^{f(t)} \begin{pmatrix} \cos(g(t)) \\ -\sin(g(t)) \end{pmatrix}, e^{f(t)} \begin{pmatrix} \sin(g(t)) \\ \cos(g(t)) \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem. Man kann auch direkt zeigen, dass diese beiden Funktionen ein Fundamentalsystem bilden. Die Matrix ist zweidimensional, der Lösungsraum daher auch, man überzeugt sich durch Nachrechnen davon, dass beide Funktionen Lösungen der Differentialgleichung sind und zeigt, dass sie linear unabhängig sind, indem man die Lösungen an einer geeigneten Stelle auswertet.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$